

Zahlentheorie Tipps

Abschnitt 1.1

1. Faktorisiere $(ab + cd) - (ad + bc)$.
2. Ist $n + 1$ ein Teiler von $n^2 + 1$, dann auch von $n(n + 1) - (n^2 + 1) = n - 1$ und so weiter.
3. Ist d ein Teiler von $n^2 + 1$ und von $(n + 1)^2 + 1$, dann auch von $((n + 1)^2 + 1) - (n^2 + 1) = 2n + 1$. Man fährt so fort und findet letztlich, dass für d nur zwei Möglichkeiten in Frage kommen. Für diese beiden Werte von d ist nun aber noch ein geeignetes n anzugeben!
4. Siehe Kombinatorik Skript.
5. Sicher ist $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ durch viele Zahlen teilbar. Wie sieht es mit den natürlichen Zahlen in der Nähe von $n!$ aus? Können die prim sein?
6. Die rechte Seite ist eine Zweierpotenz, also durch keine Primzahl $p \geq 3$ teilbar. Dasselbe gilt natürlich dann auch für die linke Seite. Was ist aber, wenn $a, b \geq 3$? Da die Gleichung symmetrisch in a und b ist, kann man ausserdem noch $a \geq b$ annehmen, dies verkürzt die Lösung etwas.
7. Was kann man über die Exponenten von 2, 3 und 5 in der Primfaktorzerlegung von n sagen? Was über die Exponenten der anderen Primfaktoren, falls es solche gibt?
8. Wann gilt $a^m = a^n$? Man beachte die speziellen Fälle $a = 0, \pm 1$.
9. Man kann sogar zeigen, dass $abc \mid a^{13}$ und analog für die anderen Summanden.
10. Dass n 10 aufeinanderfolgende natürliche Zahlen als Teiler besitzt, lässt auf einen Teil der Primfaktorzerlegung von n schliessen. Benütze ausserdem Aufgabe 4.
11. Was bedeuten die Teilbarkeitsbedingungen in der Aufgabe für die Exponenten in der Primfaktorzerlegung von a und b ?
12. Betrachte einen Primteiler p von m . Es genügt zu zeigen, dass der Exponent von p in der Primfaktorzerlegung von m gerade ist.
13. Sei p eine Primzahl. Man muss sich überlegen, wieviele und welche der Zahlen $n, \dots, n + 5$ durch p teilbar sein können. Interessant sind dabei die Fälle $p = 2$ und $= 3$. Übrigens: es gibt kein solches n .

14. Man muss induktiv vorgehen, im Gegensatz zu Aufgabe 5, wo man die n Zahlen explizit hinschreiben kann. Hat man also $n - 1$ aufeinanderfolgende Zahlen, von denen keine eine Primzahlpotenz ist, muss man mit deren Hilfe n neue Zahlen mit derselben Eigenschaft konstruieren. Diese Aufgabe ist schwieriger zu lösen als Aufgabe 5. Dennoch kann man sich dort die nötige Inspiration holen.

Abschnitt 1.2

1. Berechne den ggT von Zähler und Nenner mit Hilfe des Euklidschen Algorithmus.
2. Das ist eine Notationsschlacht. Schreibe $g = (a, b, c)$, $(a, b) = xg$, $(b, c) = yg$, $(c, a) = zg$. Dann sind x, y, z paarweise teilerfremd (wieso?). Versuche nun, die kgVs durch g, x, y, z auszudrücken.
3. Man sollte verschiedene Fälle unterscheiden. Ist die Zahl $n = 2m + 1$ zum Beispiel ungerade, dann kann man schreiben $n = m + (m + 1)$, wie gewünscht. Etwas schwieriger aber ähnlich ist der Fall, wenn n gerade ist. Wo verwendet man eigentlich die Voraussetzung $n > 6$?
4. Setze $d = \text{ggT}(a, b)$ und schreibe $a = xd, b = yd$. Dann sind x und y teilerfremd. Dies kann man verwenden, um zu zeigen, dass $d \mid x + y$ gilt, was die Behauptung impliziert. Die Details auszufüllen ist eure Aufgabe.
5. Was ist denn der ggT von k und $n + k + 2$ (also von Zähler und Nenner der einzelnen Brüche)? Diese sollen ja alle gleich 1 sein.
6. Die Idee ist, einen sozusagen asymmetrischen Ansatz zu machen. Schreibe $\text{ggT}(a, c) = e$, $\text{ggT}(b, d) = f$ sowie $a = xe, c = ye$ und $b = zf, d = wf$. Dann sind x, y teilerfremd, genau wie z, w . Was folgt nun aus $ab = cd$?
7. Man kann einzeln zeigen, dass gilt $i \mid a_i$ und $a_i \mid i$.
8. Wenn der Stein auf dem Feld (x, y) liegt, wie verändert sich der ggT von x und y bei einem Zug?
9. Man sollte sich die Primfaktorzerlegungen von $5!$ und $50!$ hinschreiben und dann überlegen, wie man die Faktoren auf x und y verteilen kann. Denn es gilt ja auch $xy = 5! \cdot 50!$. Die Nebenbedingung $x \leq y$ sollte man fürs erste ignorieren und erst am Schluss ins Spiel bringen.
10. Seien $a, a - 1, \dots, a - n + 1$ natürliche Zahlen, sodass a ein Teiler ist von $\text{kgV}(a - 1, \dots, a - n + 1)$. Die wichtige Beobachtung ist dann, dass kein Primteiler von a grösser als $n - 1$ sein kann (wieso?). Damit kann man für $n = 3, 4$ geeignet argumentieren. Für $n \geq 5$ sollte man sich solche Mengen explizit konstruieren, dazu ist vielleicht eine Fallunterscheidung nötig.

11. Versuche, m und n irgendwie kleiner zu machen, sodass der ggT derselbe bleibt. Für kleine Werte von n und m kann man von Hand ausrechnen. Das ganze funktioniert ähnlich wie der Euklidische Algorithmus, ist aber nicht ganz so einfach. Probiert mal ein Bisschen herum, vielleicht müsst ihr auch verschiedene Fälle unterscheiden.

Abschnitt 1.3

1. Wenn x, y, z alle gross sind, ist die linke Seite kleiner als 1.
2. Die rechte Seite liegt zwischen zwei Quadratzahlen, wenn x gross ist.
3. Man soll also 1976 als Summe von natürlichen Zahlen schreiben, sodass das Produkt dieser Zahlen maximal ist. Das Entscheidende ist, dass diese Summanden alle recht klein sein müssen. Denn tritt eine grosse Zahl in der Summe auf, lässt sich das Produkt vergrössern, indem man diese durch zwei kleinere Zahlen ersetzt. Versucht sauber zu argumentieren!
4. Die linke Seite ist immer ≥ 3 .
5. Zuerst sollte man sich überlegen, wieviele Teiler n hat. Sind es sehr viele, dann ist $d_{13} + d_{14} + d_{15}$ sicher kleiner als n . Danach kann man diese drei Teiler durch n ausdrücken, indem man wieder abschätzt. Der Rest ist dann eine hübsche Anwendung der Primfaktorzerlegung.
6. Geht gleich vor, wie in Beispiel 3. Dies ist nun eben so eine typische IMO Standard Aufgabe. Achtet aber darauf, dass ihr sauber argumentiert und keine Lösungen verliert. Das Prinzip der Lösung ist zwar simpel, der Teufel steckt aber in den Details.
7. Sind a, b, c sehr gross, dann ist der Bruch kleiner als 2 und sicher grösser als 1, also keine ganze Zahl. Technisch sollte man wohl erst den Nenner etwas handlicher machen, indem man $a = 1 + x, b = 1 + y, c = 1 + z$ substituiert.
8. Das sieht ähnlich aus wie Aufgabe 2, nur dass keine Quadrate zu erkennen sind. Dann produziert man eben welche durch quadratisches Ergänzen. Multipliziere die Gleichung mit 4 und addiere 1, die linke Seite ist jetzt ein Quadrat. Und die rechte?
9. Ähnlich wie Aufgabe 6, aber etwas schwieriger. Man benötigt wohl mehr als eine Abschätzung und am Anfang ist auch nicht ganz klar, wonach man eigentlich sucht. Ihr müsst einfach basteln, bis ihr auf etwas stösst, das ihr brauchen könnt.