

Zahlentheorie Lösungen

Abschnitt 1.1

1. Es gilt $(a - c)(b - d) = (ab + cd) - (ad + bc)$ und folglich

$$a - c \mid (ab + cd) - (a - c)(b - d) = ad + bc.$$

2. Es gilt $n + 1 \mid n \cdot (n + 1) - (n^2 + 1) = n - 1$ und weiter $n + 1 \mid (n + 1) - (n - 1) = 2$. Daher ist $n = 1$ die einzige solche Zahl.

3. Nehme an, d sei ein Teiler von $n^2 + 1$ und von $(n + 1)^2 + 1$. Dann schliesst man der Reihe nach

$$\begin{aligned} d &\mid ((n + 1)^2 + 1) - (n^2 + 1) = 2n + 1, \\ \Rightarrow d &\mid n(2n + 1) - 2(n^2 + 1) = n - 2, \\ \Rightarrow d &\mid (2n + 1) - 2(n - 2) = 5. \end{aligned}$$

Da 5 eine Primzahl ist, gilt also $d = 1$ oder $d = 5$. Wir müssen nun für diese beiden Möglichkeiten noch ein geeignetes n angeben, das die Bedingungen der Aufgabe erfüllt. Für $d = 1$ funktioniert jede natürliche Zahl n , wie man leicht sieht. Für $d = 5$ geht zum Beispiel $n = 2$, denn $5 \mid 2^2 + 1 = 5$ und $5 \mid 3^2 + 1 = 10$. Die Antwort ist somit $d = 1$ und $d = 5$.

4. Eine natürliche Zahl m ist genau dann ein Teiler von n , wenn die Primfaktorzerlegung von m von der Form $m = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}$ ist mit $0 \leq m_i \leq n_i$ für $1 \leq i \leq r$. Es gibt nun also $n_1 + 1$ Möglichkeiten, den Exponenten m_1 zu wählen, $n_2 + 1$ Möglichkeiten für den Exponenten m_2 usw. Nach der Produktregel gibt es daher $(n_1 + 1) \cdots (n_r + 1)$ verschiedene positive Teiler von n .

5. Von den n Zahlen

$$(n + 1)! + 2, (n + 1)! + 3, \dots, (n + 1)! + (n + 1)$$

ist keine prim, denn $(n + 1)! + k$ ist grösser als k , und durch k teilbar für $2 \leq k \leq n + 1$, also nicht prim.

6. Die Gleichung ist symmetrisch in a und b , daher können wir oBdA $a \leq b$ annehmen. Ist $a \geq 3$, dann ist die LS der Gleichung durch 3 teilbar, die RS aber nicht, Widerspruch. Ist $a = 1$, dann folgt $1 + b! = 2^n$. Für $b \geq 2$ ist die LS ungerade und grösser als 1, Widerspruch. Folglich gilt $b = 1$ und damit $n = 1$.

Ist $a = 2$, dann folgt analog $2 + b! = 2^n$. Für $b \geq 4$ ist die LS nicht durch 4 teilbar und grösser als 4, Widerspruch. Folglich gilt $b = 2$ und $n = 2$ oder $b = 3$ und $n = 3$.

Die einzigen Lösungstriple (a, b, n) sind also

$$(1, 1, 1), (2, 2, 2), (2, 3, 3), (3, 2, 3).$$

7. Eine natürliche Zahl n erfüllt genau dann die Bedingungen der Aufgabe, wenn die Exponenten in der Primfaktorzerlegung von $2n$, $3n$ bzw. $5n$ alle gerade, durch 3 bzw. durch 5 teilbar sind. Es ist daher klar, dass alle Zahlen der Form

$$n = 2^{15} \cdot 3^{20} \cdot 5^{24} \cdot k^{30}$$

die gewünschte Eigenschaft haben, dabei ist k eine beliebige natürliche Zahl. Eine genauere Analyse zeigt ausserdem, dass dies sogar alle solchen Zahlen sind.

8. Seien a, m, n ganze Zahlen, sodass gilt $a^m = a^n$. Dabei nehmen wir im Fall $a = 0$ an, dass m und n von 0 verschieden sind (denn 0^0 ist nicht definiert). Man überlegt sich leicht, dass dies genau in folgenden Fällen erfüllt ist:

$a = 0$ Für alle Paare (m, n) mit $m \neq 0 \neq n$.

$a = 1$ Für alle Paare (m, n) .

$a = -1$ Für alle Paare (m, n) , sodass m und n beide gerade oder beide ungerade sind.

$|a| \geq 2$ Nur dann, wenn $m = n$.

Nun zu der Aufgabe selbst. Man rechnet leicht nach, dass $n = 0, 1, 2$ Lösungen sind. Wir nehmen nun an, dass $n \neq 0, 1, 2$ ist. Dann gilt $|n^2 - 2n| \geq 2$ und daher muss die Gleichung $n^2 + 47 = 16n - 16$ gelten. Diese hat die beiden Lösungen $n = 7$ und $n = 9$. Insgesamt gilt die Gleichung also genau für $n = 0, 1, 2, 7, 9$.

9. Nach Voraussetzung ist $c \mid a^3$ und $b \mid c^3 \mid a^9$, also $abc \mid a \cdot a^9 \cdot a^3 = a^{13}$. Analog zeigt man $abc \mid b^{13}$ und $abc \mid c^{13}$. Dies ergibt die Behauptung.
10. Von 10 aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist sicher eine durch 9, eine durch 8, eine durch 7 und eine durch 5 teilbar. Daher ist n durch $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ teilbar. Sei nun

$$n = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$$

die Primfaktorzerlegung von n , wobei $r \geq 0$, $e_k \geq 1$ und $a \geq 3$, $b \geq 2$, $c, d \geq 1$. Dann ist die Anzahl positiver Teiler von n gleich

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(e_1+1) \cdots (e_r+1).$$

Nach Voraussetzung ist dies gleich $100 = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$, ein Vergleich mit den Faktoren in obiger Formel zeigt, dass $a = b = 4$ und $c = d = 1$ sowie $r = 0$ gelten muss. Die einzige mögliche Lösung ist daher $n = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 136080$. Diese Zahl besitzt nun tatsächlich genau 100 Teiler, unter denen die 10 aufeinanderfolgenden $1, 2, \dots, 10$ vorkommen.

11. Sei p eine Primzahl und sei p^r die grösste p -Potenz, die a teilt, p^s die grösste p -Potenz, die b teilt (r und s können auch gleich 0 sein). Wir zeigen $r = s$, damit haben a und b identische Primfaktorzerlegungen und sind demnach gleich. Die Teilbarkeitsbedingungen in der Aufgabe implizieren die Ungleichungen

$$r \leq 2s \leq 3r \leq 4s \leq 5r \leq \dots$$

Wir nehmen jetzt an, es gelte $r < s$. Dann ist $s/r - 1 > 0$, es gibt also eine natürliche Zahl n , sodass gilt $s/r - 1 > 1/(2n)$. Dies ist äquivalent zu $(2n)s > (2n+1)r$, im Widerspruch zu einer der obigen Ungleichungen. Ähnlich führt man die Annahme $s > r$ zum Widerspruch.

12. Sei p ein Primteiler von m . Nach Voraussetzung existiert eine natürliche Zahl k mit $m^2 + n^2 - m = 2mnk$. Dies ist äquivalent zur Gleichung $n^2 = m(2nk - n + 1)$. Nach Annahme ist die rechte Seite durch p teilbar, also auch die linke, also auch n . Dann ist aber $2nk - n + 1$ sicher nicht durch p teilbar. Folglich kommt der Faktor p in den Primfaktorzerlegungen von m und n^2 mit demselben Exponenten vor, und dieser ist gerade. Wiederholt man dasselbe Argument für alle Primfaktoren von m , folgt daraus dass m eine Quadratzahl sein muss.
13. Für das folgende beachte man stets, dass zwei verschiedene ganze Zahlen, die beide durch d teilbar sind, sich um mindestens d unterscheiden. Sei n eine natürliche Zahl wie in der Aufgabenstellung. Eine Primzahl, die eine der sechs Zahlen $n, \dots, n + 5$ teilt, muss mindestens zwei dieser Zahlen teilen, da die beiden Produkte sonst verschieden sind. Daraus folgt, dass keine der sechs Zahlen einen Primfaktor ≥ 7 besitzt. Ausserdem müssen n und $n + 5$ durch 5 teilbar sein. Von den vier aufeinanderfolgenden Zahlen $n + 1, \dots, n + 4$ sind zwei ungerade, und höchstens eine dieser beiden kann durch 3 teilbar sein. Folglich besitzt eine dieser vier Zahlen überhaupt keinen Primteiler und ist somit gleich 1, im Widerspruch zu $n \geq 1$. Es gibt kein solches n .
14. Wir beweisen die Aussage mit vollständiger Induktion. Für $n = 1$ ist zum Beispiel $x = 6$ keine Primpotenz. Wir nehmen nun an, wir hätten n aufeinanderfolgende Zahlen $x - n, x - n + 1, \dots, x - 1$ gefunden, von denen keine eine Primpotenz ist. Dann ist auch keine der $n + 1$ Zahlen

$$x \cdot x! + (x - n), x \cdot x! + (x - n + 1), \dots, x \cdot x! + (x - 1), x \cdot x! + x$$

eine Primpotenz. Für den Beweis unterscheiden wir zwei Fälle.

Für $1 \leq k \leq n$ ist $x!$ und damit auch $x \cdot x! + (x - k)$ durch $x - k$ teilbar, besitzt also mindestens zwei verschiedene Primteiler, so wie $x - k$ auch. Nun ist aber auch $x \cdot x! + x = x(x! + 1)$ keine Primpotenz, denn $x! + 1$ ist nicht durch x teilbar, besitzt also mindestens einen weiteren Primfaktor, der in der Primfaktorzerlegung von x nicht auftritt.

Abschnitt 1.2

1. Durch wiederholtes Anwenden der Identität $(a, b) = (a, b - a)$ erhält man

$$(21n + 4, 14n + 3) = (7n + 1, 14n + 3) = (7n + 1, 7n + 2) = (7n + 1, 1) = 1.$$

2. Wir führen zuerst einige Notationen ein. Setze $d = \text{ggT}(a, b, c)$ und

$$x = \text{ggT}\left(\frac{b}{d}, \frac{c}{d}\right), \quad y = \text{ggT}\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{d}\right), \quad z = \text{ggT}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right).$$

Dann sind x, y und z paarweise teilerfremd nach Definition von d . Ausserdem ist $\frac{a}{d}$ durch y und z teilbar, also auch durch deren Produkt, folglich ist $A = \frac{a}{dxy}$ eine ganze Zahl. Definiere B und C analog, dann gilt $\text{ggT}(x, A) = \text{ggT}(y, B) = \text{ggT}(z, C) = 1$. Es lassen sich jetzt alle interessierenden Grössen einfach ablesen (man zeichne ein Venn-Diagramm zur Veranschaulichung):

$$a = dyzA, \quad b = dzxB, \quad c = dxyC,$$

$$\begin{aligned}
(a, b) &= dz, & (b, c) &= dx, & (c, a) &= dy, \\
[a, b] &= dxyzAB, & [b, c] &= dxyzBC, & [c, a] &= dxyzCA, \\
(a, b, c) &= d, & [a, b, c] &= dxyzABC.
\end{aligned}$$

Einsetzen bestätigt nun, dass beide Seiten der Gleichung gleich $1/(dxyz)$ sind.

3. Wir unterscheiden drei Fälle. Ist $n = 2k + 1$ ungerade, dann gilt $n = k + (k + 1)$. Die beiden Summanden rechts sind teilerfremd und > 1 wegen $k \geq 3$. Ist $n = 4k + 2$ gerade aber nicht durch 4 teilbar, dann können wir schreiben $n = (2k - 1) + (2k + 3)$. Wieder sind die beiden Summanden teilerfremd, da sie ungerade sind und Differenz 4 haben. Wegen $k \geq 2$ sind sie auch > 1 . Ist $n = 4k$ durch 4 teilbar, dann setzen wir $n = (2k - 1) + (2k + 1)$. Die Summanden sind ungerade Zahlen und haben Differenz 2, sind also teilerfremd. Wegen $k \geq 2$ sind sie auch > 1 .

4. Wenn

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} = \frac{a^2 + b^2 + a + b}{ab}$$

eine ganze Zahl ist, dann muss ab ein Teiler von $a^2 + b^2 + a + b$ sein, also auch von

$$(a^2 + b^2 + a + b) + 2ab = (a + b)^2 + (a + b) = (a + b)(a + b + 1).$$

Sei nun $d = \text{ggT}(a, b)$ und schreibe $a = dx$ und $b = dy$. Einsetzen und kürzen mit d ergibt dann $dxy \mid (x+y)(dx+dy+1)$. Nun ist d teilerfremd zu $dx+dy+1$, also gilt sogar $d \mid x+y$, insbesondere ist $d \leq x+y$. Multiplikation mit d liefert nun $d^2 \leq dx+dy = a+b$, also gilt $d \leq \sqrt{a+b}$.

5. Die Brüche $k/(n+k+2)$ sollen alle irreduzibel sein für $68 \leq k \leq 133$. Es gilt

$$\text{ggT}(k, n+k+2) = \text{ggT}(k, n+2),$$

also muss $n+2$ teilerfremd sein zu $68, \dots, 133$. Jede Primzahl p mit $68 \leq p \leq 133$ teilt natürlich eine dieser Zahlen, also kann $n+2$ nicht durch p teilbar sein. Dasselbe gilt für Primzahlen $p \leq 66$, denn eine der 66 aufeinanderfolgenden Zahlen $68, \dots, 133$ ist sicher durch p teilbar. Man findet daher $n+2 = 67$ und $n+2 = 137$ als kleinstmögliche Werte. Die Antwort lautet also $n = 65$ und $n = 135$.

6. Wir setzen $\text{ggT}(a, c) = e$ und $\text{ggT}(b, d) = f$ sowie $a = xe, c = ye$ und $b = zf, d = wf$. Dann sind x und y teilerfremd, genau wie z und w . Einsetzen in die Gleichung $ab = cd$ ergibt $xzef = ywef$, also $xz = yw$. Wegen $\text{ggT}(x, y) = \text{ggT}(z, w) = 1$ folgt hieraus unmittelbar $x = w$ und $y = z$. Daher gilt

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = x^2e^2 + y^2f^2 + y^2e^2 + x^2f^2 = (x^2 + y^2)(e^2 + f^2).$$

Die beiden Faktoren rechts sind beide grösser als 1, somit ist $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ keine Primzahl.

7. Sei $n \geq 1$ fest. Es gilt nach Voraussetzung $\text{ggT}(a_n, a_{2n}) = \text{ggT}(n, 2n) = n$. Insbesondere ist a_n durch n teilbar. Wir schreiben $a_n = kn$ mit einer natürlichen Zahl k und zeigen, dass $k = 1$ gilt. Nehme an, $k > 1$. Mit demselben Argument wie oben folgt, dass a_{kn} durch kn teilbar ist. Folglich gilt

$$kn \mid \text{ggT}(a_n, a_{kn}) = \text{ggT}(n, kn) = n,$$

dies ist aber ein Widerspruch zu $k > 1$. Somit ist in der Tat $a_n = n$, und da n beliebig war, ist der Beweis abgeschlossen.

8. Wir zeigen, dass der Stein genau dann auf das Feld (a, b) ziehen kann, wenn $\text{ggT}(a, b)$ eine Zweierpotenz ist.

Ein Zug wie in (a) multipliziert $\text{ggT}(a, b)$ höchstens mit dem Faktor 2, ein Zug wie in (b) lässt diesen immer unverändert. Ist das Feld (a, b) vom Feld (x, y) aus erreichbar, dann muss folglich $\text{ggT}(a, b) = 2^n \cdot \text{ggT}(x, y)$ gelten für eine nichtnegative ganze Zahl n . Mit $x = y = 1$ folgt hieraus insbesondere, dass $\text{ggT}(a, b)$ eine Zweierpotenz sein muss, für jedes erreichbare Feld (a, b) .

Sei nun (a, b) ein beliebiges Feld mit $\text{ggT}(a, b) = 2^n$. Wir zeigen, dass der Stein das Feld (a, b) erreichen kann. Wir wählen x, y so, dass das Feld (a, b) von (x, y) aus erreichbar ist, und $x + y$ minimal ist. Ist x gerade, dann kann (a, b) auch von $(x/2, y)$ aus erreicht werden, im Widerspruch zur Minimalität von $x + y$. Analog zeigt man, dass y ungerade ist. Wäre $x > y$, dann kann (a, b) auch von $((x + y)/2, y)$ aus erreicht werden, wieder im Widerspruch zur Minimalität. Genauso führt man $y > x$ zum Widerspruch. Somit gilt $x = y$, und nach obiger Bemerkung ist $\text{ggT}(x, y)$ ein Teiler von $\text{ggT}(a, b) = 2^n$. Da $x = y$ ungerade ist, folgt $x = y = 1$.

9. Wir ignorieren vorerst die Bedingung $x \leq y$. Nach Voraussetzung gilt $x = 5!a, y = 5!b$ mit teilerfremden Zahlen a und b . Ausserdem ist

$$a \cdot b = \frac{\text{kgV}(x, y)}{\text{ggT}(x, y)} = \frac{50!}{5!} = 2^{44} \cdot 3^{21} \cdot 5^{11} \cdot 7^8 \cdot 11^4 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47.$$

Jede der 15 Primpotenzen auf der rechten Seite muss entweder a oder b teilen, da a und b teilerfremd sind. Für jede Primpotenz gibt es also zwei Möglichkeiten und insgesamt daher 2^{15} Paare (x, y) . Für jedes solche Paar ist aber $x \neq y$, denn zum Beispiel ist genau eine dieser Zahlen durch 47 teilbar. Daher gilt für genau die Hälfte dieser Paare $x < y$, für die andere Hälfte $x > y$. Die Antwort lautet daher 2^{14} .

10. Für $n = 3$ gibt es keine solche Menge. Die grösste Zahl in einer solchen Menge kann nämlich nicht durch eine Primzahl $p \geq 3$ teilbar sein, da sonst die beiden kleineren Zahlen sicher nicht durch p teilbar sind. Also ist die grösste Zahl eine Zweierpotenz 2^m mit $m \geq 2$. Von den beiden kleineren Zahlen $2^m - 2, 2^m - 1$ ist die zweite ungerade und die erste ebenfalls nicht durch 2^m teilbar, Widerspruch.

Sei zuerst $n = 2k$ gerade. Für $k \geq 2$ funktioniert die Menge

$$\{2k - 1, 2k, 2k + 1, \dots, 4k - 2\},$$

denn es gilt bereits $4k - 2 \mid \text{kgV}(2k - 1, 2k)$. Für $k \geq 3$ funktioniert aber auch

$$\{2k - 5, 2k - 4, 2k - 3, \dots, 4k - 6\},$$

da $4k - 6 \mid \text{kgV}(2k - 4, 2k - 3)$.

Für $n = 2k + 1$ ungerade und $k \geq 2$ funktioniert die Menge

$$\{2k - 2, 2k - 1, 2k, \dots, 4k - 2\},$$

und für $k \geq 4$ auch die Menge

$$\{2k - 6, 2k - 5, 2k - 4, \dots, 4k - 6\}.$$

Für $n \geq 4$ gibt es also immer eine solche Menge, und für $n \neq 4, 5, 7$ sogar mindestens zwei. Für $n = 5$ ist aber zum Beispiel $\{8, 9, 10, 11, 12\}$ eine zweite solche Menge, für $n = 7$ ist $\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ eine. Es bleibt der Fall $n = 4$. Sei $\{x - 3, x - 2, x - 1, x\}$ eine Menge wie gefordert, dann kann x durch keine Primzahl ≥ 5 teilbar sein. Aber x kann auch nicht durch 4 teilbar sein, da sonst $x - 3$ und $x - 1$ ungerade sind und $x - 2$ nicht durch 4 teilbar ist. Analog kann x auch nicht durch 9 teilbar sein. Es bleiben die Möglichkeiten $x = 1, 2, 3, 6$. Da aber $x \geq 4$ sein muss, gibt es wirklich nur die eine Menge $\{3, 4, 5, 6\}$, die wir bereits gefunden haben.

11. Wir setzen zur Abkürzung

$$s_{m,n} = (5^m + 7^m, 5^n + 7^n).$$

Für $m > n$ gilt

$$(5^{m-n} + 7^{m-n})(5^n + 7^n) - (5^m + 7^m) = 5^{m-n}7^n + 5^n7^{m-n} = 5^t7^t(5^{|m-2n|} + 7^{|m-2n|})$$

mit $t = \min\{n, m - n\}$. Nun ist $5^n + 7^n$ sicher teilerfremd zu 5^t7^t , denn wäre zum Beispiel p ein gemeinsamer Primteiler von 5 und $5^n + 7^n$, dann auch von 7, Widerspruch. Wir haben also bewiesen, dass für $m > n$ gilt

$$s_{m,n} = s_{|m-2n|,n}.$$

Wenn nun m und n teilerfremd sind, dann auch $|m - 2n|$ und n . Ausserdem gilt offenbar $|m - 2n| + n < m + n$ und beide Zahlen sind entweder gerade oder ungerade. Man kann also dieses Verfahren wiederholen, solange eine der beiden Zahlen m, n grösser als 1 ist. Das Ganze endet dann bei $(m, n) = (1, 1)$ oder bei $(m, n) = (1, 0)$ wegen der Teilerfremdheit. Somit erhalten wir

$$s_{m,n} = \begin{cases} s_{1,1} = 12 & \text{für } m + n \text{ gerade,} \\ s_{1,0} = 2 & \text{für } m + n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Abschnitt 1.3

1. Die Gleichung ist äquivalent zu

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 1 + \frac{3}{z}.$$

Die rechte Seite ist immer grösser als 1, also auch die linke. Wäre $x \geq 2$ und $y \geq 4$, dann wäre die linke Seite aber höchstens 1, Widerspruch. Wir unterscheiden daher vier Fälle.

- (i) $x = 1$. Die Gleichung lautet dann $\frac{2}{y} = \frac{3}{z}$, also $3y = 2z$. Die Lösungen sind in diesem Fall $(x, y, z) = (1, 2k, 3k)$ für $k \geq 1$.
- (ii) $y = 1$. Die Gleichung lautet $\frac{1}{x} + 1 = \frac{3}{z}$. Die linke Seite ist immer > 1 , also auch die rechte, und somit ist $z < 3$. Dies liefert die Lösung $(x, y, z) = (2, 1, 2)$.
- (iii) $y = 2$. Die Gleichung wird zu $\frac{1}{x} = \frac{3}{z}$, also zu $z = 3x$. Die Lösungen sind in diesem Fall $(x, y, z) = (k, 2, 3k)$ für $k \geq 1$.
- (iv) $y = 3$. Die Gleichung lautet $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} + \frac{3}{z}$. Die rechte Seite ist immer $> \frac{1}{3}$, also ist $x < 2$. Dies führt zur letzten Lösung $(x, y, z) = (2, 3, 18)$.

Insgesamt gibt es also zwei Lösungsfamilien

$$(x, y, z) = (1, 2k, 3k) \quad \text{und} \quad (x, y, z) = (k, 2, 3k), \quad k \geq 1,$$

sowie die beiden speziellen Lösungen

$$(2, 1, 2) \quad \text{und} \quad (2, 3, 18).$$

2. Die rechte Seite

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$$

ist strikt positiv und muss eine Quadratzahl sein. Andererseits gilt aber

$$(x^2 + 3x + 1)^2 = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + 1,$$

und somit ist die rechte Seite immer um 1 kleiner als eine Quadratzahl. Es gibt aber keine zwei positiven Quadratzahlen mit Differenz 1, Widerspruch.

3. Wir betrachten irgendeine Menge natürlicher Zahlen mit Summe 1976 und verändern sie fortlaufend ohne ihre Summe zu verändern und ohne ihr Produkt zu verkleinern. Dies tun wir in mehreren Schritten, wobei die einzelnen Schritte solange wiederholt werden, bis sie nicht mehr nötig sind. Man überlegt sich jeweils leicht, dass jeder Schritt nur endlich oft wiederholt werden kann, und dass sich die Summe der Zahlen dabei nie ändert.

- (i) Falls eine dieser Zahlen gleich 1 ist, dann wähle eine beliebige andere Zahl a aus, lösche die Zahlen a und 1 und füge die neue Zahl $a + 1$ hinzu. Das Produkt vergrößert sich dabei um den Faktor $\frac{a+1}{a} > 1$.
- (ii) Gibt es eine Zahl $a \geq 4$, dann ersetze sie durch die beiden Zahlen $a - 2$ und 2. Wegen $2(a - 2) \geq a$ wird das Produkt nicht kleiner.
- (iii) Enthält die Menge mindestens dreimal die Zahl 2, dann entferne drei Zweien und ersetze sie durch zwei Dreien. Wegen $3^2 > 2^3$ vergrößert sich dabei das Produkt.

Die Menge besteht jetzt nur noch aus höchstens zweimal der Zahl 2 und sonst aus lauter Dreien. Wegen $1976 = 854 \cdot 3 + 2$ enthält die Menge genau 854 Dreien und eine Zwei. Das Produkt aller Zahlen ist also gleich $2 \cdot 3^{854}$ und das ist der grösstmögliche Wert.

4. Es gilt für beliebige positive reelle Zahlen a, b, c die Ungleichung

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}.$$

(Ungleichung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel, siehe Ungleichungsskript). Somit erhält man für die linke Seite der Gleichung die Abschätzung

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{y} \frac{y}{z} \frac{z}{x}} = 3.$$

Die Gleichung besitzt also keine Lösungen (nicht einmal positive reelle!).

5. Wir bestimmen zuerst k . Für $k = 15$ wäre die rechte Seite wegen $d_{15} = n$ grösser als n , Widerspruch. Für $k \geq 17$ hingegen hätte man $d_{16} \leq \frac{n}{2}$, $d_{15} \leq \frac{n}{3}$, $d_{14} \leq \frac{n}{4}$ und $d_{13} \leq \frac{n}{5}$. Insgesamt also

$$d_{13} + d_{14} + d_{15} \leq \frac{n}{5} + \frac{n}{4} + \frac{n}{3} < n,$$

Widerspruch. Also ist $k = 16$.

Als nächstes bestimmen wir die Teiler d_{13} , d_{14} und d_{15} . Wäre $d_{15} \leq \frac{n}{3}$, dann erhält man wie oben einen Widerspruch, da die linke Seite der Gleichung zu klein wäre. Also ist $d_{15} = \frac{n}{2}$ und n ist gerade. Wäre $d_{14} \leq \frac{n}{4}$, erhält man ähnlich

$$d_{13} + d_{14} + d_{15} \leq \frac{n}{5} + \frac{n}{4} + \frac{n}{2} < n,$$

also ist $d_{14} = \frac{n}{3}$ und n muss durch 3 teilbar sein. Eine kurze Rechnung zeigt nun $d_{13} = \frac{n}{6}$, also kann n nicht durch 4 oder 5 teilbar sein.

Da n genau 16 positive Teiler hat, muss die Primfaktorzerlegung von n eine der folgenden sein: $n = p^{15}$, $n = p^7q$, $n = p^3q^3$, $n = p^3qr$ oder $n = pqr s$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen p, q, r, s . Ausserdem wissen wir, dass n durch 2 und 3 teilbar ist, aber nicht durch 4 und 5. Das schliesst die erste Möglichkeit aus. Wir betrachten die anderen einzeln.

- (i) $n = p^7q$. Es kann nicht $p = 2$ sein, sonst wäre n durch 4 teilbar. Also ist $q = 2$ und $p = 3$, also $n = 2 \cdot 3^7$.
- (ii) $n = p^3q^3$. Eine der Primzahlen p, q muss gleich 2 sein. Dann ist n aber durch 4 teilbar, Widerspruch.
- (iii) $n = p^3qr$. Wieder kann p nicht gleich 2 sein. Also ist oBdA $q = 2$. Ausserdem ist $p = 3$ oder $r = 3$ und die andere Primzahl ist mindestens 7, denn sonst wäre n durch 5 teilbar. Wir erhalten also die beiden Familien $n = 54r$ und $n = 6p^3$ mit $p, r \geq 7$.
- (iv) $n = pqr s$. OBdA ist $p = 2$ und $q = 3$. Die verbleibenden Primfaktoren r, s müssen wieder mindestens gleich 7 sein. Dies ergibt die Familie $n = 6rs$ mit $7 \leq r < s$.

Man überlegt sich leicht, dass diese Zahlen wirklich alle Lösungen sind. Wir haben also die folgenden Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} n &= 4574, \\ n &= 54p \quad \text{oder} \quad 6p^3 \quad \text{mit } p \geq 7 \text{ prim,} \\ n &= 6pq \quad \text{mit } p > q \geq 7 \text{ prim.} \end{aligned}$$

6. Ist $ab^2 + b + 7$ ein Teiler von $a^2b + a + b$, dann auch von

$$b(a^2b + a + b) - a(ab^2 + b + 7) = b^2 - 7a.$$

Wir unterscheiden drei Fälle.

- (i) $b^2 - 7a = 0$. Dann ist $b^2 = 7a$ durch 7 teilbar, also $b = 7k$ für ein $k \geq 1$. Dies führt zu den Lösungen $(a, b) = (7k^2, 7k)$, $k \geq 1$.
- (ii) $b^2 - 7a > 0$. Dann muss wegen der Teilbarkeitsbedingung die Abschätzung

$$ab^2 + b + 7 \leq b^2 - 7a$$

gelten. Dies ist äquivalent zu $b^2(a - 1) + b \leq -7(a + 1)$, was unmöglich ist, da die rechte Seite negativ ist.

- (iii) $b^2 - 7a < 0$. Dies liefert die Abschätzung

$$ab^2 + b + 7 \leq 7a - b^2.$$

Daraus folgt $b^2(a+1) \leq 7(a-1) - b < 7(a-1)$ und weiter $b^2 < 7 \cdot \frac{a-1}{a+1} < 7$, also $b = 1$ oder $b = 2$. Für $b = 1$ folgt nun $a+8 \mid 7a-1$, also auch $a+8 \mid 7(a+8) - (7a-1) = 57 = 3 \cdot 19$. Dies liefert die Lösungen $(a, b) = (11, 1)$ und $(49, 1)$. Für $b = 2$ folgt analog $4a+9 \mid 7a-4$, also auch $4a+9 \mid 7(4a+9) - 4(7a-4) = 79$. Da 79 prim ist, müsste dann sogar $4a+9 = 79$ sein, was unmöglich ist.

Wir erhalten also die Lösungen $(a, b) = (11, 1)$, $(49, 1)$, sowie die Familie

$$(a, b) = (7k^2, 7k), \quad k \geq 1.$$

7. Wir setzen $a = 1 + x$, $b = 1 + y$ und $c = 1 + z$, es gilt dann $1 \leq x < y < z$. Der gegebene Ausdruck lautet nun

$$A = \frac{(x+1)(y+1)(z+1) - 1}{xyz} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}.$$

Die rechte Seite ist immer grösser als 1 und wenn alle drei Variablen gross sind, auch kleiner als 2, also keine ganze Zahl. Das werden wir nun präzisieren. Ist $x \geq 3$, dann auch $y \geq 4$ und $z \geq 5$ und die rechte Seite ist höchstens gleich

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{20} = 1 + \frac{14}{15} + \frac{1}{20} < 2,$$

also muss $x \leq 2$ gelten.

- (i) $x = 1$. Es ist

$$A = 2 + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} + \frac{1}{yz} > 2.$$

Für $y \geq 4$ ergibt sich andererseits $A \leq 2 + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} + \frac{1}{20} < 3$, Widerspruch. Also ist $1 < y < 4$. Für $y = 2$ erhält man $A = 3 + \frac{5}{z}$ und wegen $z \geq 3$ den Widerspruch $3 < A < 4$. Für $y = 3$ ist $A = \frac{8}{3} + \frac{8}{3z}$ und wegen $z \geq 4$ somit $2 < A < 4$. Es muss also $A = 3$ sein, was auf $z = 8$ führt. Die einzige Lösung in diesem Fall ist also $(x, y, z) = (1, 3, 8)$.

(ii) $x = 2$. Es ist

$$A = \frac{3}{2} + \frac{3}{2y} + \frac{3}{2z} + \frac{1}{yz}.$$

Für $y \geq 6$ ist $1 < A < 2$, also muss $2 < y < 6$ sein. Wie oben testet man die verbleibenden Fälle durch und erhält die Lösung $(x, y, z) = (2, 4, 14)$.

Somit sind die einzigen beiden Lösungstriplet die folgenden:

$$(a, b, c) = (2, 4, 9) \quad \text{und} \quad (a, b, c) = (3, 5, 15).$$

8. Multipliziert man die Gleichung mit 4 und addiert 1, dann lautet sie

$$(2y + 1)^2 = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

Die rechte Seite muss also eine Quadratzahl sein. Eine kurze Rechnung ergibt nun

$$\begin{aligned} (2x^2 + x)^2 &= 4x^4 + 4x^3 + x^2, \\ (2x^2 + x + 1)^2 &= 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1. \end{aligned}$$

Der erste Ausdruck scheint eher kleiner als die rechte Seite der Gleichung zu sein, der zweite eher grösser. Tatsächlich gilt $(2x^2 + x)^2 < \text{RS} \Leftrightarrow 3x^2 + 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \neq -1$. Und ähnlich $(2x^2 + x + 1)^2 > \text{RS} \Leftrightarrow x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x \neq 0, 1, 2$. Das bedeutet, dass die rechte Seite für $x \neq -1, 0, 1, 2$ zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen liegt und somit nicht selbst eine sein kann. Die vier verbleibenden Fälle ergeben dann die Lösungen

$$(x, y) = (-1, -1), (-1, 0), (0, -1), (0, 0), (2, -6), (2, 5).$$

9. Da der Nenner nicht verschwinden darf, ist m oder n grösser als 1. Wegen $mn - 1 \mid n^3 + 1$ gilt auch

$$mn - 1 \mid m(n^3 + 1) - n^2(mn - 1) = n^2 + m, \quad (1)$$

$$mn - 1 \mid m(n^2 + m) - n(mn - 1) = m^2 + n. \quad (2)$$

Umgekehrt impliziert (1) wie auch (2) die ursprüngliche Teilbarkeitsbedingung. Die drei Bedingungen sind also alle äquivalent. Wegen der Symmetrie in (1) und (2) ist ein Paar (a, b) genau dann eine Lösung, wenn auch das Paar (b, a) eine ist. Wir können also $m \geq n$ annehmen.

Aus (1) folgt nun die Abschätzung $mn - 1 \leq n^2 + m$, also $m(n - 1) \leq n^2 + 1$. Für $n \geq 4$ folgt daraus

$$m \leq \frac{n^2 + 1}{n - 1} = n + 1 + \frac{2}{n - 1} < n - 2,$$

Also ist dann $m = n$ oder $m = n + 1$. Wir betrachten diese Fälle nun einzeln.

- (i) $m = n (> 1)$. Aus (1) folgt $n^2 - 1 \mid n^2 + n$, also auch $n^2 - 1 \mid n + 1$. Für $n \geq 3$ ist $n^2 - 1 > n + 1$, was nicht möglich ist. Die einzige Lösung ist in diesem Fall also $m = n = 2$.
- (ii) $m = n + 1$. Aus (1) folgt $n^2 + n - 1 \mid n^2 + n + 1$, also auch $n^2 + n - 1 \mid 2$. Dies ergibt die Lösung $n = 1, m = 2$.

- (iii) $n = 1$. Wegen (i) und (ii) können wir $m \geq 3$ annehmen. Aus (1) folgt $m-1 \mid m+1$, also $m-1 \mid 2$. Dies liefert die Lösung $m = 3$.
- (iv) $n = 2$. Wieder können wir $m \geq 4$ annehmen. Aus (1) folgt $2m-1 \mid m+4$, also $2m-1 \mid 2(m+4) - (2m-1) = 9$. Die einzige Lösung ist $m = 5$.
- (v) $n = 3$. Hier können wir $m \geq 5$ annehmen. Aus (1) folgt $3m-1 \mid m+9$, also $3m-1 \mid 3(m+9) - (3m-1) = 28$. Dies ergibt schliesslich die Lösung $m = 5$.

Man rechnet leicht nach, dass alle gefundenen Paare wirklich Lösungen sind, wir erhalten also folgende Liste:

$$(m, n) = (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 2), (2, 5), (5, 2), (3, 5), (5, 3).$$