

# 1 Grundlagen

## 1.1 Teilbarkeit

Im Folgenden sind  $a$  und  $b$  ganze Zahlen. Gibt es ein  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $a = kb$ , dann sagt man,  $a$  sei durch  $b$  *teilbar* oder  $b$  sei ein *Teiler* von  $a$ . In Zeichen:  $b \mid a$ . Jede ganze Zahl  $n$  ist durch  $\pm 1$  und  $\pm n$  teilbar und jede ganze Zahl ist ein Teiler von 0. Ist  $a > 0$ , dann hat sich eingebürgert, dass man unter den *Teilern* von  $a$  nur die positiven Teiler versteht.

$p \in \mathbb{N}$  heisst *prim* oder *Primzahl*, wenn  $p$  und 1 die einzigen Teiler von  $p$  sind.

Es gelten die folgenden einfachen aber wichtigen Fakten:

- $a \mid b$  und  $b \mid c \implies a \mid c$
- $a \mid b_1, \dots, a \mid b_n$ , dann gilt für beliebige ganze Zahlen  $c_1, \dots, c_n$

$$a \mid \sum_{i=1}^n b_i c_i.$$

- $a \mid b$  und  $c \mid d \implies ac \mid bd$
- $p$  prim und  $p \mid ab \implies p \mid a$  oder  $p \mid b$
- $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}$  und  $a \mid b \implies b = 0$  oder  $a \leq |b|$

**Beispiel 1.** *Finde alle natürlichen Zahlen  $x, y$  mit*

$$x^2 - y! = 2001.$$

*Lösung.* 2001 ist durch 3 teilbar aber nicht durch 9. Ist  $y \geq 3$ , dann ist  $y!$  durch 3 teilbar, also auch  $x$ . Dann ist  $x^2$  aber sogar durch 9 teilbar. Für  $y \geq 6$  ist auch  $y!$  durch 9 teilbar, also müsste dies auch für 2001 gelten, was nicht der Fall ist. Es bleiben die Möglichkeiten  $y = 1, 2, 3, 4, 5$ , durchtesten dieser Fälle liefert die einzige Lösung  $(x, y) = (45, 4)$ . □

Bekanntlich kann man ganze Zahlen stets mit Rest teilen. Genauer lautet diese Aussage wie folgt:

**Satz 1.1** (Division mit Rest). *Seien  $a, b$  ganze Zahlen mit  $b > 0$ . Dann existieren eindeutig bestimmte ganze Zahlen  $q$  und  $r$  mit  $0 \leq r < b$ , sodass gilt*

$$a = qb + r,$$

*$r$  heisst Rest der Division und es ist  $r = 0$  genau dann, wenn  $b \mid a$ .*

Einer der zentralen Punkte der ganzen Zahlentheorie ist die Tatsache, dass jede natürliche Zahl eindeutig als Produkt von Primzahlen geschrieben werden kann:

**Theorem 1.2** (Primfaktorzerlegung). *Zu jeder natürlichen Zahl  $a$  existieren verschiedene Primzahlen  $p_1, p_2, \dots, p_r$  und natürliche Zahlen  $n_1, n_2, \dots, n_r$  mit*

$$a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}.$$

*Die  $p_i$  und die  $n_i$  sind durch  $a$  eindeutig bestimmt.*

Man beweist diesen Satz induktiv mit Hilfe der Division mit Rest, wir gehen aber nicht darauf ein. Der Fall  $a = 1$  entspricht dem leeren Produkt auf der rechten Seite, d.h. es gibt überhaupt keine Primfaktoren und es gilt  $r = 0$ . Dieser Satz hat viele wichtige Konsequenzen, wir erwähnen hier zwei davon. Sei  $a = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}$  die Primfaktorzerlegung der natürlichen Zahl  $a$ , dann gilt:

- $a$  besitzt genau  $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_r + 1)$  verschiedene positive Teiler.
- $a$  ist genau dann eine  $m$ -te Potenz einer natürlichen Zahl, wenn alle Exponenten  $n_k$  durch  $m$  teilbar sind.

Als weitere Anwendung bringen wir noch ein klassisches Resultat, das auf EUKLID zurückgeht:

**Satz 1.3.** *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

*Beweis.* Nehme an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen  $p_1, p_2, \dots, p_n$  und betrachte die Zahl  $N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ . Wegen  $N > 1$  gibt es nach Theorem 1.2 einen Primteiler  $q$  von  $N$ . Nun ist  $N$  aber durch keine der Primzahlen  $p_k$  teilbar, denn sonst würde  $p_k \mid 1$  folgen, was absurd ist. Also ist  $q$  verschieden von  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , im Widerspruch zur Annahme. □

### Aufgaben:

1. Finde alle natürlichen Zahlen  $n$  mit  $n + 1 \mid n^2 + 1$ .
2. Seien  $a \neq c$  zwei ganze Zahlen. Gilt  $a - c \mid ab + cd$ , dann auch  $a - c \mid ad + bc$ .
3. Zu jeder natürlichen Zahl  $n$  gibt es  $n$  aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, von denen keine prim ist.
4. Zeige, dass es unendlich viele natürliche Zahlen  $n$  gibt, sodass  $2n$  ein Quadrat,  $3n$  eine dritte Potenz und  $5n$  eine fünfte Potenz ist.
5. (CH 04) Finde alle natürlichen Zahlen  $a, b$  und  $n$ , sodass die folgende Gleichung gilt:

$$a! + b! = 2^n$$

6. Seien  $a, b, c$  natürliche Zahlen mit  $a \mid b^2, b \mid c^2, c \mid a^2$ . Zeige

$$abc \mid a^7 + b^7 + c^7.$$

7. (CH 06) Finde alle Tripel  $(p, q, r)$  von Primzahlen, sodass auch die drei Differenzen  $|p - q|$ ,  $|q - r|$  und  $|r - p|$  alle Primzahlen sind.
8. Bestimme alle natürlichen Zahlen  $d$ , für die eine natürliche Zahl  $n$  existiert, sodass  $d$  ein Teiler ist von  $n^2 + 1$  und von  $(n + 1)^2 + 1$ .
9. (CH 04) Bestimme alle natürlichen Zahlen  $n$  mit genau 100 verschiedenen positiven Teilern, sodass mindestens 10 dieser Teiler aufeinanderfolgende Zahlen sind.
10. Sind  $a, b > 0$  und gilt  $a \mid b^2, b^2 \mid a^3, a^3 \mid b^4, b^4 \mid a^5 \dots$ , dann ist  $a = b$ .
11. (CH 99) Es seien  $m$  und  $n$  zwei positive ganze Zahlen, sodass  $m^2 + n^2 - m$  durch  $2mn$  teilbar ist. Zeige, dass  $m$  eine Quadratzahl ist.

12. (CH 08) Finde alle natürlichen Zahlen  $n$ , sodass die Anzahl positiver Teiler von  $n$  gleich dem drittkleinsten positiven Teiler von  $n$  ist.
13. (IMO 70) Finde alle natürlichen Zahlen  $n$ , für die sich die Menge  $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$  in zwei Teilmengen zerlegen lässt, sodass das Produkt der Zahlen in beiden Teilmengen dasselbe ist.
14. (IMO 89) Zu jedem  $n$  gibt es  $n$  aufeinanderfolgende Zahlen, von denen keine eine Primzahlpotenz ist.

## 1.2 ggT und kgV

Für zwei ganze Zahlen  $a, b$  bezeichnet  $\text{ggT}(a, b)$  den *grössten gemeinsamen Teiler* von  $a$  und  $b$ , mit anderen Worten die grösste positive Zahl, die ein Teiler von  $a$  und ein Teiler von  $b$  ist.  $\text{kgV}(a, b)$  bezeichnet das *kleinste gemeinsame Vielfache*, also die kleinste positive Zahl, die  $a$  und  $b$  als Teiler besitzt. Analog definiert man den ggT und das kgV von mehr als zwei Zahlen und verwendet die abkürzende Notation  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  und  $[a_1, a_2, \dots, a_n]$  für den ggT bzw. das kgV. Formal kann man den ggT wie folgt charakterisieren:

Es ist äquivalent:

- 1)  $c = \text{ggT}(a, b)$
- 2)  $c > 0$  ist ein Teiler von  $a$  und  $b$  und für jede positive Zahl  $x$  gilt  
 $x \mid a, x \mid b \implies x \mid c$ .

Analoges gilt für das kgV. Ist  $\text{ggT}(a, b) = 1$ , dann heissen  $a$  und  $b$  *teilerfremd*. Es gelten die folgenden Fakten:

- $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(b, a)$
- $\text{ggT}(a, b, c) = \text{ggT}(\text{ggT}(a, b), c)$
- $c \mid ab$  und  $\text{ggT}(a, c) = 1 \implies c \mid b$
- $a \mid c, b \mid c$  und  $\text{ggT}(a, b) = 1 \implies ab \mid c$
- Ist  $d = \text{ggT}(a, b)$ , dann existieren *teilerfremde* ganze Zahlen  $x$  und  $y$  mit  $a = xd$  und  $b = yd$ . Ausserdem ist dann  $\text{kgV}(a, b) = xyd$  (vgl. Satz 1.4).
- Sind  $a, b$  teilerfremde natürliche Zahlen, sodass  $ab$  eine  $m$ -te Potenz ist, dann sind  $a$  und  $b$  beide  $m$ -te Potenzen.

Unter Verwendung der Primfaktorzerlegung lassen sich ggT und kgV explizit angeben:

**Satz 1.4.** Seien  $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$  und  $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}$  die Faktorisierungen von  $a$  und  $b$  mit verschiedenen Primzahlen  $p_k$  und Exponenten  $\alpha_k, \beta_k \geq 0$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \text{ggT}(a, b) &= p_1^{\min\{\alpha_1, \beta_1\}} p_2^{\min\{\alpha_2, \beta_2\}} \dots p_r^{\min\{\alpha_r, \beta_r\}} \\ \text{kgV}(a, b) &= p_1^{\max\{\alpha_1, \beta_1\}} p_2^{\max\{\alpha_2, \beta_2\}} \dots p_r^{\max\{\alpha_r, \beta_r\}} \end{aligned}$$

Ausserdem folgt daraus mit Hilfe der Formel  $\min\{x, y\} + \max\{x, y\} = x + y$  sofort

$$\text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b) = ab.$$

**Beispiel 2.** (Russland 95) Seien  $m$  und  $n$  natürliche Zahlen mit

$$\text{ggT}(m, n) + \text{kgV}(m, n) = m + n.$$

Zeige, dass eine der beiden Zahlen durch die andere teilbar ist.

*Lösung.* Sei  $d$  der grösste gemeinsame Teiler von  $m$  und  $n$ . Schreibe  $m = ad, n = bd$ , dann gilt  $\text{kgV}(m, n) = abd$  nach Satz 1.4. Die Gleichung wird zu  $d + abd = ad + bd$  oder  $d(ab - a - b + 1) = 0$ . Faktorisieren der linken Seite gibt  $d(a - 1)(b - 1) = 0$ , also ist  $a = 1$  oder  $b = 1$ . Im ersten Fall gilt  $m = d$ , also  $m \mid n$ , im zweiten Fall folgt analog  $n \mid m$ . □

Mit den Formeln in Satz 1.4 lässt sich der ggT im Prinzip immer berechnen. Das Problem dabei ist der enorme Aufwand, grosse Zahlen zu faktorisieren. Es gibt aber zum Glück ein einfaches und sehr effizientes Berechnungsverfahren, nämlich den *EUKLID'schen Algorithmus*, der auch vom theoretischen Standpunkt aus interessant ist. Grundlage dafür ist die Tatsache, dass für alle ganzen Zahlen  $a, b$  und  $n$  die folgende Gleichung gilt:

$$(a, b) = (a, b + na). \tag{1}$$

*Beweis.* Es genügt, dies für  $n = \pm 1$  zu zeigen, der allgemeine Fall folgt dann durch wiederholte Anwendung. Ist  $c$  ein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ , dann teilt  $c$  auch  $b \pm a$ , also gilt  $(a, b) \mid (a, b \pm a)$ . Sei umgekehrt  $c$  ein gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b + a$  bzw.  $b - a$ , dann teilt  $c$  auch  $(b + a) - a = b$  bzw.  $(b - a) + a = b$ . Daraus folgt  $(a, b \pm a) \mid (a, b)$ . □

Als Zahlenbeispiel berechnen wir damit  $(2541, 1092)$ , indem wir die Gleichung (1) solange anwenden, bis das Ergebnis klar ist:

$$\begin{aligned} (2541, 1092) &= (2541 - 2 \cdot 1092, 1092) = (357, 1092) \\ &= (1092 - 3 \cdot 357, 357) = (21, 357) \\ &= (357 - 17 \cdot 21, 21) = (0, 21) = 21. \end{aligned}$$

Die Idee ist offenbar, dass man mit dem Rest der Division der grösseren durch die kleinere Zahl weiterrechnet. Formalisiert wird das im

**Algorithmus 1.5** (EUKLID). *Berechnung von  $(a, b)$  für  $a, b \geq 0$ .*

1. Setze  $a_1 = \max\{a, b\}$  und  $a_2 = \min\{a, b\}$  sowie  $n = 2$ .
2. Schreibe  $a_{n-1} = q_n a_n + a_{n+1}$  mit  $0 \leq a_{n+1} < a_n$  (Division mit Rest).
3. Ist  $a_{n+1} = 0$ , dann gilt  $(a, b) = a_n$ , sonst erhöhe  $n$  um 1 und gehe zu Schritt 2.

Die Richtigkeit dieses Algorithmus ergibt sich unmittelbar aus (1). Für unser Zahlenbeispiel sind dann also die folgenden Rechnungen anzustellen:

$$\begin{aligned} 2541 &= 2 \cdot 1092 + 357 \\ 1092 &= 3 \cdot 357 + 21 \\ 357 &= 17 \cdot 21 + 0. \end{aligned}$$

Weil die Division in der letzten Zeile aufgeht, gilt also  $(2541, 1092) = 21$ .

**Satz 1.6** (BÉZOUT). Sind  $a, b$  teilerfremd, dann gibt es ganze Zahlen  $x, y$  mit

$$xa + yb = 1.$$

Allgemeiner: Ist  $d = \text{ggT}(a, b)$ , dann existieren ganze Zahlen  $x, y$  mit

$$xa + yb = d.$$

*Beweis.* Das folgt unmittelbar aus dem Euklidischen Algorithmus: Aus der vorletzten Zeile des Algorithmus erhält man die Gleichung  $\text{ggT}(a, b) = a_n$ . Setzt man diesen Ausdruck für  $a_n$  in die  $(n-1)$ -te Zeile ein und iterativ die entstehenden Ausdrücke für  $a_k$  in die  $(k-1)$ -te Zeile für immer kleinere  $k$ , dann folgt schliesslich eine Gleichung der Form  $\text{ggT}(a, b) = xa + yb$ .  $\square$

In unserem Beispiel erhält man der Reihe nach

$$\begin{aligned} 21 &= 1 \cdot 1092 - 3 \cdot 357 \\ &= 1 \cdot 1092 - 3(2541 - 2 \cdot 1092) \\ &= (-3) \cdot 2541 + 7 \cdot 1092. \end{aligned}$$

Als Anwendung besprechen wir noch die lineare Diophant'sche Gleichung in zwei Variablen.

**Satz 1.7.** Seien  $a, b, c$  ganze Zahlen. Die Gleichung

$$ax + by = c$$

hat genau dann eine Lösung  $(x, y)$  mit  $x, y \in \mathbb{Z}$ , wenn  $d = \text{ggT}(a, b) \mid c$ . Ist dies der Fall und  $(x_0, y_0)$  eine Lösung, dann sind alle Lösungen gegeben durch

$$(x, y) = \left( x_0 + k \cdot \frac{b}{d}, y_0 - k \cdot \frac{a}{d} \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

*Beweis.* Nehme an,  $(x, y)$  sei eine Lösung. Dann ist  $d$  ein Teiler der linken Seite, also auch von  $c$ . Ist umgekehrt  $d \mid c$ , dann folgt die Existenz einer Lösung  $(x_0, y_0)$  direkt aus dem Satz von Bézout. Sei  $(x, y)$  eine weitere Lösung, dann gilt  $a(x - x_0) + b(y - y_0) = c - c = 0$ , also

$$\frac{a}{d} \cdot (x - x_0) = -\frac{b}{d} \cdot (y - y_0).$$

Nun sind  $a/d$  und  $b/d$  teilerfremd, daher ist  $(x - x_0)$  durch  $b/d$  teilbar und  $(y - y_0)$  durch  $a/d$ . Daraus folgt unmittelbar, dass alle Lösungen von der angegebenen Gestalt sind. Einsetzen zeigt, dass es auch wirklich Lösungen sind.  $\square$

## Aufgaben

1. (IMO 59) Zeige, dass für jedes natürliche  $n$  der folgende Bruch irreduzibel ist:

$$\frac{21n + 4}{14n + 3}.$$

2. Jede natürliche Zahl  $> 6$  ist die Summe zweier teilerfremder natürlicher Zahlen  $> 1$ .
3. (CH 05) Seien  $m, n$  zwei teilerfremde natürliche Zahlen. Zeige, dass dann auch die beiden Zahlen  $m^3 + mn + n^3$  und  $mn(m + n)$  teilerfremd sind.

4. (Spanien 96) Seien  $a, b$  natürliche Zahlen, sodass

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$$

eine ganze Zahl ist. Zeige, dass der grösste gemeinsame Teiler von  $a$  und  $b$  nicht grösser als  $\sqrt{a+b}$  ist.

5. (CH 01) Finde die zwei kleinsten natürlichen Zahlen  $n$ , sodass die Brüche

$$\frac{68}{n+70}, \frac{69}{n+71}, \frac{70}{n+72}, \dots, \frac{133}{n+135}$$

alle irreduzibel sind.

6. (Kanada 97) Bestimme die Anzahl Paare  $(x, y)$  positiver ganzer Zahlen mit  $x \leq y$ , die die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\text{ggT}(x, y) = 5! \quad \text{und} \quad \text{kgV}(x, y) = 50!$$

7. Seien  $a, b, c, d$  natürliche Zahlen mit  $ab = cd$ . Zeige, dass die Zahl  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  keine Primzahl ist.

8. (Russland 95) Für die Folge natürlicher Zahlen  $a_1, a_2, a_3, \dots$  gelte  $\text{ggT}(a_i, a_j) = \text{ggT}(i, j)$  für alle  $i \neq j$ . Zeige, dass  $a_i = i$  gilt für alle  $i \geq 1$ .

9. (Deutschland 96) Ein Stein startet bei  $(1, 1)$  und bewegt sich auf der Koordinatenebene nach den folgenden Regeln:

(a) Vom Feld  $(a, b)$  aus kann der Stein auf  $(2a, b)$  oder  $(a, 2b)$  ziehen.

(b) Vom Feld  $(a, b)$  aus kann der Stein auf das Feld  $(a-b, b)$  ziehen, falls  $a > b$ , oder auf das Feld  $(a, b-a)$ , falls  $b > a$ .

Für welche natürlichen Zahlen  $x, y$  kann der Stein auf das Feld  $(x, y)$  ziehen?

10. (CH 05) Bestimme alle nichtleeren Mengen  $M$  natürlicher Zahlen, sodass für je zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) Elemente  $a, b$  aus  $M$  auch

$$\frac{a+b}{\text{ggT}(a, b)}$$

in  $M$  liegt.

11. (USA 72) Wie üblich bezeichnen  $(\dots)$  und  $[\dots]$  den ggT und das kgV der eingeklammerten Zahlen. Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen  $a, b, c$  gilt

$$\frac{[a, b, c]^2}{[a, b][b, c][c, a]} = \frac{(a, b, c)^2}{(a, b)(b, c)(c, a)}$$

12. (IMO 81) Für welche  $n > 2$  gibt es eine Menge von  $n$  aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, sodass die grösste dieser Zahlen ein Teiler ist des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der übrigen  $n-1$  Zahlen? Für welche  $n$  gibt es genau eine solche Menge?

13. (Japan 96) Seien  $m, n$  natürliche Zahlen mit  $\text{ggT}(m, n) = 1$ . Berechne

$$\text{ggT}(5^m + 7^m, 5^n + 7^n).$$

### 1.3 Abschätzungen

Ein sehr wichtiges Element beim Lösen von zahlentheoretischen Problemen ist das Abschätzen von bestimmten Grössen. Oft kann man dadurch alles auf ein paar wenige Fälle reduzieren, die dann einfach zu lösen sind, oder man kommt überhaupt erst weiter so. Es geht dabei darum, bei Gleichungen irgendwie das Wachstumsverhalten der involvierten Grössen gegeneinander abzuwägen. Was damit genau gemeint ist, sehen wir nun an einer Reihe recht verschiedener Beispiele.

**Beispiel 3.** *Finde alle natürlichen Zahlen  $n$  mit  $n^2 + 11 \mid n^3 + 13$ .*

Was hat das nun mit Abschätzungen zu tun? Schauen wir uns an:

*Lösung.*  $n^2 + 11$  ist ein Teiler von  $n^3 + 13$ , also auch von  $n(n^2 + 11) - (n^3 + 13) = 11n - 13$ . Offenbar ist  $n = 1$  keine Lösung, für  $n \geq 2$  ist aber  $11n - 13 > 0$  und da diese Zahl durch  $n^2 + 11$  teilbar sein soll, muss gelten

$$n^2 + 11 \leq 11n - 13.$$

Hier ist nun also die Abschätzung. Da die linke Seite quadratisch in  $n$  ist, die rechte nur linear, kann diese Ungleichung nur für kleine Werte von  $n$  erfüllt sein. Sie ist äquivalent zu  $n^2 - 11n + 24 = n(n - 11) + 24 \leq 0$ . Für  $n \geq 12$  gilt nun aber stets  $n(n - 11) + 24 \geq 12 \cdot 1 + 24 > 0$ , folglich ist  $n \leq 11$ . Durchtesten dieser Fälle ergibt die beiden Lösungen  $n = 3$  und  $n = 8$ . □

Der entscheidende Punkt war hier die einfache Bemerkung, dass aus  $a \mid b$  und  $b > 0$  stets  $|a| \leq b$  folgt. Dieses Prinzip ist oft anwendbar, auch bei einer ganzen Reihe von IMO Aufgaben. Merkt es euch!

**Beispiel 4.** *(England 95) Bestimme alle Lösungen in natürlichen Zahlen der Gleichung*

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{b}\right) \left(1 + \frac{1}{c}\right) = 2.$$

Hier ist die rechte Seite konstant, die linke wird offenbar immer kleiner, wenn  $a, b$  und  $c$  grösser werden. Sind alle drei Variablen sehr gross, dann ist jeder der Faktoren rechts ungefähr gleich 1 und die Gleichung kann nicht erfüllt sein. Dies müssen wir nun präzisieren.

*Lösung.* Die Gleichung ist symmetrisch in  $a, b$  und  $c$ , wir können daher OBdA  $a \geq b \geq c$  annehmen. Dann ist die linke Seite einerseits gleich 2, andererseits aber höchstens gleich  $(1 + 1/c)^3$ . Eine kurze Rechnung zeigt aber, dass  $(1 + 1/c)^3 < 2$  gilt für  $c \geq 4$ , folglich ist  $c \leq 3$ . Wir unterscheiden nun drei Fälle:

$c = 1$ : Wegen  $(1 + 1/a) > 1$  und  $(1 + 1/c) = 2$  ist die linke Seite grösser als 2, ein Widerspruch.

$c = 2$ : Die Gleichung wird zu  $(1 + 1/a)(1 + 1/b) = 4/3$  und ähnlich wie oben erhält man die Abschätzung  $4/3 \leq (1 + 1/b)^2$ , also  $b \leq 6$ . Wegen  $(1 + 1/a) > 1$  ist ausserdem  $b \geq 4$ . Einsetzen der 3 möglichen Werte für  $b$  liefert die Lösungen  $(7, 6, 2)$ ,  $(9, 5, 2)$  und  $(15, 4, 2)$ .

$c = 3$ : Die Gleichung wird zu  $(1 + 1/a)(1 + 1/b) = 3/2$  und analog zu vorher erhält man  $b \leq 4$  und  $b \geq c = 3$ . Einsetzen ergibt die Lösungen  $(8, 3, 3)$  und  $(5, 4, 3)$ .

Insgesamt sind die Lösungen also alle symmetrischen Vertauschungen von

$$(7, 6, 2), (9, 5, 2), (15, 4, 2), (8, 3, 3), (5, 4, 3).$$

□

Durch mehrfaches Abschätzen haben wir der Reihe nach obere Schranken für  $c$  und  $b$  gefunden und mussten dann noch einige wenige Fälle durchprobieren. Mit Teilbarkeitsbetrachtungen allein hätte man diese Aufgabe wohl kaum gelöst.

**Beispiel 5.** Bestimme alle Lösungen in natürlichen Zahlen der Gleichung

$$abc = ab + bc + ca + 12.$$

Hier wächst die linke Seite offenbar stärker als die rechte, wenn  $a, b$  und  $c$  alle gross werden. Die linke ist vom Grad 3, die rechte nur vom Grad 2 + Störterm. Wie können wir das quantifizieren?

*Lösung.* OBdA sei  $a \geq b \geq c$ . Wie wir uns überlegt haben, muss  $c$  klein sein. In der Tat, für  $c \geq 4$  erhalten wir sofort  $abc \geq 4ab \geq ab + bc + ca + 4^2 > ab + bc + ca + 12$ , Widerspruch. Also ist  $c \leq 3$ .

$c = 3$ :  $3ab = ab + 3a + 3b + 12 \Leftrightarrow ab + (a-3)(b-3) = 21$ . Wegen  $a \geq b \geq 3$  ist dann  $ab \leq 21$  und für  $(a, b)$  kommen nur die Paare  $(7, 3), (6, 3), (5, 3), (4, 3), (3, 3), (5, 4), (4, 4)$  in Frage. Durchtesten zeigt, dass davon nur das erste eine Lösung ist.

$c = 2$ :  $2ab = ab + 2a + 2b + 12 \Leftrightarrow (a-2)(b-2) = 16$ . Wegen  $a \geq b \geq 2$  erhalten wir die Lösungen  $(a, b) = (18, 3), (10, 4), (6, 6)$ .

$c = 1$ :  $ab = ab + a + b + 12 \Leftrightarrow a + b = -12$  hat keine positive Lösung.

Insgesamt sind die Lösungen  $(a, b, c)$  die symmetrischen Vertauschungen von

$$(18, 3, 2), (10, 4, 2), (6, 6, 2), (7, 3, 3).$$

□

**Beispiel 6.** Bestimme alle positiven ganzzahligen Lösungen von  $x^3 - y^3 = xy + 61$ .

Hier ist die linke Seite von der Ordnung 3, die rechte hat Ordnung 2, dennoch kann man offensichtlich die linke Seite auch für grosse  $x$  und  $y$  klein halten. Das Argument der letzten Aufgabe ist hier also nicht direkt anwendbar. Vielmehr ist entscheidend, wie gross die Differenz der beiden Zahlen ist. Mit ihr wächst die linke Seite stärker als die rechte.

*Lösung.* Um dies genauer zu ergründen, setzen wir  $d = x - y$ . Da die rechte Seite der Gleichung stets positiv ist, gilt  $d > 0$ . Einsetzen liefert  $(y+d)^3 - y^3 = (y+d)y + 61 \Leftrightarrow (3d-1)y^2 + (3d^2-d)y + d^3 = 61$ , insbesondere ist  $d^3 \leq 61$ , also  $d \leq 3$ , denn die beiden Klammern links sind nicht negativ. Für  $d = 1$  erhalten wir die Gleichung  $y^2 + y - 30 = 0$  mit der einzigen positiven Lösung  $y = 5 \Rightarrow x = 6$ . Für  $d = 2, 3$  haben die entsprechenden Gleichungen keine ganzzahligen Lösungen. Das einzige Lösungspaar ist  $(x, y) = (6, 5)$ .

□

Eine weitere wichtige Tatsache ist, dass zwischen zwei *aufeinanderfolgenden* Quadraten ( $n$ -ten Potenzen, Zweierpotenzen etc.) keine weitere liegt. Damit kommt man z.B. oft dann weiter, wenn man Grössen hat, die in der Nähe einer Quadratzahl liegen und von denen man weiss, dass sie selbst eine sind.

**Beispiel 7.** (Deutschland 95) Finde alle Paare  $(x, y)$  nichtnegativer ganzer Zahlen, welche die folgende Gleichung erfüllen:

$$x^3 + 8x^2 - 6x + 8 = y^3.$$

*Lösung.* Hier kann man nicht viel Abschätzen, was das Wachstum betrifft. Die Idee ist die folgende: Die linke Seite muss ja eine dritte Potenz sein (nämlich  $y^3$ ), liegt aber irgendwie auch nahe bei  $x^3$ . Das wollen wir quantifizieren. Wir suchen also mal in der Nähe von  $x$ :

$$\begin{aligned}(x+2)^3 &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8, \\(x+3)^3 &= x^3 + 9x^2 + 27x + 27.\end{aligned}$$

Betrachtet man jeweils den Koeffizient von  $x^2$ , dann scheint das erste eher kleiner, das zweite eher grösser als die linke Seite unserer Gleichung zu sein. Rechnen wir es aus:

$$\begin{aligned}(x+2)^3 &< x^3 + 8x^2 - 6x + 8 \Leftrightarrow 2x^2 - 18x > 0 \Leftrightarrow x > 9, \\(x+3)^3 &> x^3 + 8x^2 - 6x + 8 \Leftrightarrow x^2 + 33x + 15 > 0 \quad \text{gilt für alle } x \geq 0.\end{aligned}$$

Für  $x > 9$  liegt die linke Seite also zwischen zwei dritten Potenzen und muss selbst eine sein, Widerspruch. Daher ist  $x \leq 9$  und durchtesten dieser Fälle liefert die beiden Lösungen  $(0, 2)$  und  $(9, 11)$ . □

## Aufgaben

1. Finde alle Tripel  $(x, y, z)$  natürlicher Zahlen mit

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3}{z} = 1.$$

2. Zeige, dass die Gleichung

$$y^2 = x(x+1)(x+2)(x+3)$$

keine Lösung in positiven ganzen Zahlen besitzt.

3. (IMO 76) Finde die grösste Zahl, die sich als Produkt von natürlichen Zahlen mit Summe 1976 schreiben lässt.
4. (CH 06) Bestimme alle Lösungen in natürlichen Zahlen der Gleichung

$$\text{kgV}(a, b, c) = a + b + c.$$

5. (CH 07) Bestimme alle Paare  $(a, b)$  natürlicher Zahlen, sodass  $a^2 + 3b$  und  $b^2 + 3a$  beides Quadratzahlen sind.
6. (IMO 98) Bestimme alle Paare natürlicher Zahlen  $(a, b)$ , sodass  $a^2b + a + b$  durch  $ab^2 + b + 7$  teilbar ist.
7. (IMO 92) Man bestimme alle ganzen Zahlen  $a, b, c$  mit  $1 < a < b < c$ , sodass

$$\frac{abc - 1}{(a-1)(b-1)(c-1)}$$

eine ganze Zahl ist.

8. Sei  $n$  eine natürliche Zahl und  $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ ,  $k \geq 15$  seien die positiven Teiler von  $n$ . Es gelte

$$n = d_{13} + d_{14} + d_{15},$$

bestimme alle solchen  $n$ .

9. (CH 08) Finde alle Tripel  $(a, b, c)$  natürlicher Zahlen, sodass gilt:

$$a \mid bc - 1, \quad b \mid ca - 1, \quad c \mid ab - 1.$$

10. Finde alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$y^2 + y = x^4 + x^3 + x^2 + x.$$

11. (IMO 94) Bestimme alle geordneten Paare  $(m, n)$  natürlicher Zahlen, sodass der Bruch

$$\frac{n^3 + 1}{mn - 1}$$

eine ganze Zahl ist