Schweizer IMO - Selektion 1999

erste Prüfung - 17. Mai 1999

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Zwei Kreise schneiden sich in den beiden Punkten M und N. Sei A ein weiterer Punkt auf dem ersten Kreis, verschieden von M und N. Die Geraden AM und AN schneiden den zweiten Kreis nochmals in den Punkten B und C. Zeige, dass die Tangente an den ersten Kreis im Punkt A parallel zur Geraden BC ist.

2. Ist es möglich, die Menge $\{1, 2, \ldots, 33\}$ derart in 11 disjunkte Teilmengen zu zerlegen, dass jede Teilmenge 3 Elemente enthält, von denen eines die Summe der beiden anderen ist?

3. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, für die gilt

$$\frac{1}{x} f(-x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

4. Bestimme alle reellen Lösungen (x, y, z) des Systems

$$\frac{4x^2}{1+4x^2} = y, \qquad \frac{4y^2}{1+4y^2} = z, \qquad \frac{4z^2}{1+4z^2} = x.$$

5. Es sei $ABCD$ ein Rechteck und P sei ein Punkt auf der Geraden CD. M und N seien die Mittelpunkte von AD und BC. Die Gerade PM schneide AC in Q. Zeige, dass MN die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle QNP$ ist.

Schweizer IMO - Selektion 1999

zweite Prüfung - 20. Mai 1999

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Es seien m und n zwei positive ganze Zahlen, sodass $m^2 + n^2 - m$ durch $2mn$ teilbar ist. Zeige, dass m eine Quadratzahl ist.

7. Ein Quadrat ist in Rechtecke zerlegt, deren Seiten parallel zu den Quadratseiten liegen. Für jedes dieser Rechtecke wird das Verhältnis seiner kürzeren Seite zu seiner längeren gebildet. Zeige, dass die Summe dieser Verhältnisse mindestens 1 beträgt.

8. Bestimme alle ganzen Zahlen n, für die es positive reelle Zahlen $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ gibt mit

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 96, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 144, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k^3 = 216.$$

9. Beweise, dass es zu jedem Polynom $P(x)$ vom Grad 10 mit ganzzahligen Koeffizienten eine (in beiden Richtungen) unendliche arithmetische Folge ganzer Zahlen gibt, die keinen der Werte $P(k)$, $k \in \mathbb{Z}$ enthält.

10. Zeige, dass das Produkt von 5 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen keine Quadratzahl ist.