SMO - Vorrunde

Bellinzona, Lausanne, Zürich - 9. Januar 2010

Zeit: 3 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Bestimme alle Lösungen in natürlichen Zahlen der Gleichung

$$ab + bc + ca = 2(a + b + c).$$

2. Sei g eine Gerade in der Ebene. Die Kreise k_1 und k_2 liegen auf derselben Seite von g und berühren g in den Punkten A respektive B. Ein weiterer Kreis k_3 berühre k_1 in D und k_2 in C. Beweise dass gilt:

(a) Das Viereck $ABCD$ ist ein Sehnenviereck.

(b) Die Geraden BC und AD schneiden sich auf k_3.

3. Auf wieviele Arten kann man jeder Ecke eines Würfels eine der Zahlen $1, 2, 3, \dots, 10$ zuordnen, sodass keine Zahl mehrfach verwendet wird, und so dass für jede Seitenfläche die Summe der Zahlen in den vier angrenzenden Ecken ungerade ist?

4. Finde alle Paare (u, v) natürlicher Zahlen, sodass

$$\frac{uv^3}{u^2 + v^2}$$

eine Primpotenz ist.

5. Ein Schweizerkreuz besteht aus fünf Einheitsquadraten, einem zentralen und vier seitlich angrenzenden. Bestimme die kleinste natürliche Zahl n mit folgender Eigenschaft: Unter je n Punkten im Innern oder auf dem Rand eines Schweizerkreuzes gibt es stets zwei, deren Abstand kleiner als 1 ist.

Viel Glück!