SMO Finalrunde 2009

erste Prüfung - 13.März 2009

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei P ein reguläres Sechseck. Für einen Punkt A seien $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_6$ die Abstände von A zu den sechs Eckpunkten von P, der Grösse nach geordnet. Finde den geometrischen Ort aller Punkte A im Innern oder auf dem Rand von P, sodass

(a) d_3 den kleinstmöglichen Wert annimmt.

(b) d_4 den kleinstmöglichen Wert annimmt.

2. Ein *Palindrom* ist eine natürliche Zahl, die im Dezimalsystem vorwärts und rückwärts gelesen gleich gross ist (z.B. 1129211 oder 7337). Bestimme alle Paare (m, n) natürlicher Zahlen, sodass

$$(\underbrace{11\ldots11}_{m}) \cdot (\underbrace{11\ldots11}_{n})$$

ein Palindrom ist.

3. Seien a, b, c, d positive reelle Zahlen. Beweise die folgende Ungleichung, und bestimme alle Fälle, in denen das Gleichheitszeichen steht:

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0.$$

4. Sei n eine natürliche Zahl. Jedes Feld eines $n \times n$-Quadrates enthält eines von n verschiedenen Symbolen, sodass jedes der Symbole in genau n Feldern steht. Zeige, dass eine Zeile oder eine Spalte existiert, die mindestens $\sqrt{n}$ verschiedene Symbole enthält.

5. Sei ABC ein Dreieck mit $AB \neq AC$ und Inkreismittelpunkt I. Der Inkreis berühre BC bei D. Der Mittelpunkt von BC sei M. Zeige, dass die Gerade IM die Strecke AD halbiert.

SMO Finalrunde 2009

zweite Prüfung - 14. März 2009

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, welche für alle $x > y > z > 0$ die folgende Gleichung erfüllen:

$$f(x - y + z) = f(x) + f(y) + f(z) - xy - yz + xz.$$

7. Die Punkte A, M_1, M_2 und C liegen in dieser Reihenfolge auf einer Geraden. Sei k_1 der Kreis mit Mittelpunkt M_1 durch A und k_2 der Kreis mit Mittelpunkt M_2 durch C. Die beiden Kreise schneiden sich in den Punkten E und F. Eine gemeinsame Tangente an k_1 und k_2 berühre k_1 in B und k_2 in D. Zeige, dass sich die Geraden AB, CD und EF in einem Punkt schneiden.

8. Gegeben ist ein Bodengrundriss, der aus n Einheitsquadraten zusammengesetzt ist. Albert und Berta möchten diesen Boden mit Kacheln bedecken, wobei alle Kacheln die Form eines 1×2-Dominos oder eines T-Tetrominos haben. Albert hat nur Kacheln von einer Farbe zur Verfügung, Berta hingegen hat Dominos in zwei Farben und Tetrominos in vier Farben zur Verfügung. Albert kann diesen Bodengrundriss in a Arten mit Kacheln bedecken, Berta auf b Arten. Unter der Annahme, dass $a \neq 0$ gilt, bestimme das Verhältnis b/a.

9. Finde alle injektiven Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$f(f(n)) \leq \frac{f(n) + n}{2}.$$

10. Sei $n > 3$ eine natürliche Zahl. Beweise, dass $4^n + 1$ einen Primteiler > 20 besitzt.