

# SMO - Vorrunde

Lausanne, Zürich - 12. Januar 2008

Zeit: 3 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Gegeben sind fünf positive Teiler von  $10^{2008}$ . Zeige, dass es zwei dieser Teiler gibt, deren Produkt eine Quadratzahl ist.
2. Ein *Weg* in der Ebene führt vom Punkt  $(0, 0)$  zum Punkt  $(6, 6)$ , wobei man in jedem Schritt entweder um 1 nach rechts oder um 1 nach oben gehen kann. Wieviele Wege gibt es, die weder den Punkt  $(2, 2)$  noch den Punkt  $(4, 4)$  enthalten?
3. Sei  $ABCD$  ein Sehnenviereck mit  $CD < AD$  und  $CD < BC$ . Die Diagonalen  $AC$  und  $BD$  schneiden sich im Punkt  $S$ . Die Spiegelung der Gerade  $AB$  an  $AC$  sei  $e$  und die Spiegelung der Geraden  $AB$  an  $BD$  sei  $f$ . Die Gerade  $CD$  schneide  $e$  und  $f$  in den Punkten  $E$  bzw.  $F$ . Beweise, dass das Dreieck  $SEF$  gleichschenkelig ist.
4. Finde alle natürlichen Zahlen  $n$ , sodass die Anzahl positiver Teiler von  $n$  gleich dem drittkleinsten positiven Teiler von  $n$  ist.
5. Ein quadratisches Spielbrett besteht aus  $2n \times 2n$  Feldern. Es sollen  $n$  dieser Felder markiert werden, sodass keine zwei markierten Felder in derselben oder benachbarten Zeilen liegen, und sodass auch keine zwei markierten Felder in derselben oder benachbarten Spalten liegen. Auf wieviele Arten ist dies möglich?

Viel Glück!