

SMO - Turno preliminare

Losanna, Zurigo - 12 Gennaio 2008

Durata: 3 ore

Ogni esercizio vale 7 punti.

1. Sono dati cinque divisori positivi di 10^{2008} . Dimostra che tra questi divisori ce ne sono due tali che il loro prodotto è un quadrato.
2. Una *passeggiata* sul piano parte dal punto $(0, 0)$ e arriva nel punto $(6, 6)$, e con ogni passo si può andare un'unità verso destra oppure un'unità verso l'alto. Quante passeggiate ci sono che non passano né per il punto $(2, 2)$ né per il punto $(4, 4)$?
3. Sia $ABCD$ un quadrilatero inscritto in un cerchio tale che $CD < AD$ e $CD < BC$. Sia S il punto d'intersezione delle diagonali AC e BD . Inoltre sia e l'immagine della retta passante per AB specchiata rispetto a AC , e f l'immagine della retta per AB specchiata rispetto a BD . Siano E e F i punti d'intersezione della retta passante per CD rispettivamente con e e con f . Dimostra che il triangolo SEF è isoscele.
4. Determina tutti i numeri naturali n tali che il numero di divisori positivi di n è uguale al terzo – in ordine di grandezza – divisore positivo di n .
5. Una scacchiera quadrata è formata da $2n \times 2n$ caselle. In quanti modi è possibile colorare n di queste caselle in modo che in ogni coppia di righe adiacenti e in ogni coppia di colonne adiacenti non ci sia mai più di una casella colorata?

Buona fortuna!