

SMO - Vorrunde

Lausanne, Zürich - 13. Januar 2007

Zeit: 3 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Betrachte einen Würfel mit Kantenlänge $2a$. In jedem Eckpunkt, jedem Kantenmittelpunkt und jedem Flächenmittelpunkt befindet sich eine Stadt. Zwei Städte sind durch eine Strasse miteinander verbunden, falls ihr Abstand a beträgt. Gibt es eine Reiseroute, die durch jede Stadt genau einmal führt?
2. Wie viele siebenstellige Zahlen gibt es, für die das Produkt der Ziffern gleich 45^3 ist?
3. Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC und die Punkte D, E und F seien die Höhenfusspunkte der Höhen durch A, B bzw. C . Der Schnittpunkt der Geraden EF mit der Rechtwinkligen zu AC durch D sei S . Beweise, dass das Dreieck DES gleichschenkelig ist.
4. Bestimme alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen, sodass

$$a^2 + 3b \quad \text{und} \quad b^2 + 3a$$

beides Quadratzahlen sind.

5. Auf einem Kreis k liegen fünf verschiedene Punkte A, M, B, C und D in dieser Reihenfolge und es gelte $MA = MB$. Die Geraden AC und MD schneiden sich in P und BD schneide MC in Q . Die Gerade PQ schneide k in X und Y . Zeige $MX = MY$.

Viel Glück!