

IMO Selektion 2007

erste Prüfung - 5. Mai 2007

Zeit: 4.5 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$ und $AB > CD$. Die Punkte K und L liegen auf den Seiten AB bzw. CD mit $AK/KB = DL/LC$. Die Punkte P und Q liegen so auf der Strecke KL , dass gilt

$$\angle APB = \angle BCD \quad \text{und} \quad \angle CQD = \angle ABC.$$

Zeige, dass die Punkte P, Q, B und C auf einem Kreis liegen.

2. Bestimme die beiden kleinsten natürlichen Zahlen, die sich in der Form $7m^2 - 11n^2$ mit natürlichen Zahlen m und n schreiben lassen.
3. Wir nennen zwei Personen ein *befreundetes Paar*, wenn sie sich kennen, und wir nennen sie ein *nichtbefreundetes Paar*, wenn sie sich nicht kennen (befreundet sein oder nicht befreundet sein ist dabei immer gegenseitig). Seien m, n natürliche Zahlen. Finde die kleinste natürliche Zahl k , sodass Folgendes gilt: In jeder Gruppe von k Leuten gibt es stets $2m$ Leute, die m disjunkte befreundete Paare bilden, oder es gibt $2n$ Leute, die n disjunkte nichtbefreundete Paare bilden.

IMO Selektion 2007

zweite Prüfung - 6. Mai 2007

Zeit: 4.5 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Ein Paar (r, s) natürlicher Zahlen heisst *gut*, falls ein Polynom P mit ganzen Koeffizienten und paarweise verschiedene ganze Zahlen a_1, \dots, a_r und b_1, \dots, b_s existieren, sodass gilt

$$P(a_1) = P(a_2) = \dots = P(a_r) = 2 \quad \text{und} \quad P(b_1) = P(b_2) = \dots = P(b_s) = 5.$$

- (a) Zeige, dass für jedes gute Paar (r, s) natürlicher Zahlen $r, s \leq 3$ gilt.
(b) Bestimme alle guten Paare.

5. Seien $n > 1$ und m natürliche Zahlen. Ein Parlament besteht aus mn Abgeordneten, die $2n$ Kommissionen gebildet haben, sodass gilt:

- (i) Jede Kommission besteht aus m Abgeordneten.
(ii) Jeder Abgeordnete ist Mitglied in genau 2 Kommissionen.
(iii) Je zwei Kommissionen haben höchstens ein gemeinsames Mitglied.

Bestimme in Abhängigkeit von n den grösstmöglichen Wert von m , sodass dies möglich ist.

6. Seien a, b, c positive reelle Zahlen mit $a + b + c \geq abc$. Beweise, dass von den folgenden drei Ungleichungen mindestens zwei richtig sind:

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{6}{c} \geq 6, \quad \frac{2}{b} + \frac{3}{c} + \frac{6}{a} \geq 6, \quad \frac{2}{c} + \frac{3}{a} + \frac{6}{b} \geq 6.$$

IMO Selektion 2007

dritte Prüfung - 19. Mai 2007

Zeit: 4.5 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Sei $a_1, a_2, \dots, a_{2007}$ eine Folge, die jede der Zahlen $1, 2, \dots, 2007$ genau einmal enthält. Es wird nun wiederholt folgende Operation ausgeführt: Ist das erste Folgeglied gleich n , dann wird die Reihenfolge der ersten n Folgeglieder umgekehrt. Zeige, dass die Folge nach endlich vielen solchen Operation mit der Zahl 1 beginnt.

8. Sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck mit

$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE \quad \text{und} \quad \angle ABC = \angle ACD = \angle ADE.$$

Die Diagonalen BD und CE treffen sich in P . Zeige, dass die Gerade AP die Seite CD in deren Mittelpunkt schneidet.

9. Bestimme alle natürlichen Zahlen n , für die genau eine ganze Zahl a mit $0 < a < n!$ existiert, sodass gilt

$$n! \mid a^n + 1.$$

IMO Selektion 2007

vierte Prüfung - 20. Mai 2007

Zeit: 4.5 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Für eine natürliche Zahl n sei

$$f(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor.$$

Beweise, dass es unendlich viele natürliche Zahlen m gibt, für die die Ungleichung $f(m) < f(m+1)$ gilt, und dass es unendlich viele natürlichen Zahlen m gibt, für die die Ungleichung $f(m) > f(m+1)$ gilt.

11. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, sodass für alle $x, y > 0$ gilt

$$f(x^y) = f(x)^{f(y)}.$$

12. Im Dreieck ABC sei J der Mittelpunkt des Ankreises, welcher die Seite BC in A_1 und die Verlängerungen der Seiten AC und AB in B_1 bzw. C_1 berührt. Die Gerade A_1B_1 schneide die Gerade AB rechtwinklig in D . Sei E die Projektion von C_1 auf die Gerade DJ . Bestimme die Grösse der Winkel $\angle BEA_1$ und $\angle AEB_1$.