

SMO - Turno finale 2007

primo esame - 23 marzo 2007

Durata: 4 ore

Ogni esercizio vale 7 punti.

1. Determina tutte le soluzioni reali positive del seguente sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} a &= \max\left\{\frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\} & b &= \max\left\{\frac{1}{c}, \frac{1}{d}\right\} & c &= \max\left\{\frac{1}{d}, \frac{1}{e}\right\} \\ d &= \max\left\{\frac{1}{e}, \frac{1}{f}\right\} & e &= \max\left\{\frac{1}{f}, \frac{1}{a}\right\} & f &= \max\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right\} \end{aligned}$$

2. Siano a, b, c tre numeri interi tali che $a + b + c$ è divisibile per 13. Dimostra che anche

$$a^{2007} + b^{2007} + c^{2007} + 2 \cdot 2007abc$$

è divisibile per 13.

3. Considera il piano diviso in quadrati unitari. Ogni quadrato deve essere colorato con uno tra n colori in modo che se quattro quadrati possono essere coperti con un L-Tetromino, allora questi quadrati devono avere quattro colori diversi (il L-Tetromino può essere ruotato e riflesso). Determina il più piccolo valore di n per cui questo è possibile.
4. Sia ABC un triangolo acuto con $AB > AC$ e sia H il punto di intersezione delle altezze. Sia D il punto di intersezione dell'altezza passante per A con il lato BC . Si ottenga E specchiando C rispetto a D . Sia S il punto di intersezione delle rette AE e BH . Sia N il punto medio di AE , e M quello di BH . Dimostra che MN e DS sono perpendicolari.

5. Determina tutte le funzioni $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ con le seguenti caratteristiche:

- (a) $f(1) = 0$,
- (b) $f(x) > 0$ per ogni $x > 1$,
- (c) Per ogni $x, y \geq 0$ tali che $x + y > 0$, vale

$$f(xf(y))f(y) = f\left(\frac{xy}{x+y}\right).$$

Buon lavoro!

SMO - Turno finale 2007

secondo esame - 24 marzo 2007

Durata: 4 ore

Ogni esercizio vale 7 punti.

6. Tre cerchi k_1, k_2, k_3 della stessa grandezza si incrociano (non tangenzialmente) in un punto P . Siano A e B i centri dei cerchi k_1 e k_2 . Sia D il punto di intersezione diverso da P di k_3 con k_1 , e C quello di k_3 con k_2 . Dimostra che $ABCD$ è un parallelogrammo.

7. Siano a, b, c numeri reali non negativi con media aritmetica $m = \frac{a+b+c}{3}$. Dimostra che vale

$$\sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c}}} + \sqrt{b + \sqrt{c + \sqrt{a}}} + \sqrt{c + \sqrt{a + \sqrt{b}}} \leq 3 \sqrt{m + \sqrt{m + \sqrt{m}}}.$$

8. Sia $M \subset \{1, 2, 3, \dots, 2007\}$ un insieme con la seguente caratteristica: tra qualsiasi tre numeri di M , se ne possono sempre scegliere due tali che il primo è divisibile per il secondo. Quanti numeri può contenere M al massimo?

9. Determina tutte le coppie (a, b) di numeri naturali tali che

$$\frac{a^3 + 1}{2ab^2 + 1}$$

è un numero intero.

10. Suddividi il piano in triangoli equilateri di lato 1. Considera un triangolo equilatero di lato n i cui lati giacciono sul reticolo determinato dalla suddivisione in triangoli unitari. Su ogni punto di intersezione del reticolo sui lati e all'interno di questo triangolo è posta una pedina. Considera il gioco in cui in ogni mossa si sceglie un triangolo unitario che abbia esattamente due angoli coperti da una pedina. Queste due pedine vengono rimosse, e sul terzo angolo viene posta una nuova pedina. Per quali n è possibile che dopo un numero finito di mosse resta solo una pedina?

Buon lavoro!