

SMO Finalrunde 2007

erste Prüfung - 23. März 2007

Zeit: 4 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Bestimme alle positiven reellen Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} a &= \max\left\{\frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\} & b &= \max\left\{\frac{1}{c}, \frac{1}{d}\right\} & c &= \max\left\{\frac{1}{d}, \frac{1}{e}\right\} \\ d &= \max\left\{\frac{1}{e}, \frac{1}{f}\right\} & e &= \max\left\{\frac{1}{f}, \frac{1}{a}\right\} & f &= \max\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right\} \end{aligned}$$

2. Seien a, b, c drei ganze Zahlen, sodass $a + b + c$ durch 13 teilbar ist. Zeige, dass auch

$$a^{2007} + b^{2007} + c^{2007} + 2 \cdot 2007abc$$

durch 13 teilbar ist.

3. Die Ebene wird in Einheitsquadrate unterteilt. Jedes Feld soll mit einer von n Farben gefärbt werden, sodass gilt: Können vier Felder mit einem L-Tetromino bedeckt werden, dann haben diese Felder vier verschiedene Farben (das L-Tetromino darf gedreht und gespiegelt werden). Bestimme den kleinsten Wert von n , für den das möglich ist.
4. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $AB > AC$ und Höhenschnittpunkt H . Sei D der Höhenfußpunkt von A auf BC . Sei E die Spiegelung von C an D . Die Geraden AE und BH schneiden sich im Punkt S . Sei N der Mittelpunkt von AE und sei M der Mittelpunkt von BH . Beweise, dass MN senkrecht auf DS steht.

5. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (a) $f(1) = 0$,
- (b) $f(x) > 0$ für alle $x > 1$,
- (c) Für alle $x, y \geq 0$ mit $x + y > 0$ gilt

$$f(xf(y))f(y) = f\left(\frac{xy}{x+y}\right).$$

Viel Glück!

SMO Finalrunde 2007

zweite Prüfung - 24. März 2007

Zeit: 4 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Drei gleich grosse Kreise k_1, k_2, k_3 schneiden sich nichttangential in einem Punkt P . Seien A und B die Mittelpunkte der Kreise k_1 und k_2 . Sei D bzw. C der von P verschiedene Schnittpunkt von k_3 mit k_1 bzw. k_2 . Zeige, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

7. Seien a, b, c nichtnegative reelle Zahlen mit arithmetischem Mittel $m = \frac{a+b+c}{3}$. Beweise, dass gilt

$$\sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c}}} + \sqrt{b + \sqrt{c + \sqrt{a}}} + \sqrt{c + \sqrt{a + \sqrt{b}}} \leq 3 \sqrt{m + \sqrt{m + \sqrt{m}}}.$$

8. Sei $M \subset \{1, 2, 3, \dots, 2007\}$ eine Menge mit folgender Eigenschaft: Unter je drei Zahlen aus M kann man stets zwei auswählen, sodass die eine durch die andere teilbar ist. Wieviele Zahlen kann M höchstens enthalten?

9. Finde alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen, sodass

$$\frac{a^3 + 1}{2ab^2 + 1}$$

eine ganze Zahl ist.

10. Die Ebene wird in gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge 1 unterteilt. Betrachte ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge n , dessen Seiten auf den Gitterlinien liegen. Auf jedem Gitterpunkt auf dem Rand und im Innern dieses Dreiecks liegt ein Stein. In einem Spielzug wird ein Einheitsdreieck ausgewählt, welches auf genau 2 Ecken mit einem Stein belegt ist. Die beiden Steine werden entfernt, und auf die dritte Ecke wird ein neuer Stein gelegt. Für welche n ist es möglich, dass nach endlich vielen Spielzügen nur noch ein Stein übrig bleibt?

Viel Glück!