

SMO - Turno preliminare

Losanna, Zurigo - 13 gennaio 2007

Tempo a disposizione: 3 ore
ogni esercizio vale 7 punti.

1. Si consideri un cubo i cui spigoli hanno lunghezza $2a$. In ogni angolo, nel punto medio di ogni spigolo, e nel punto medio di ogni faccia si trova una città. Due città sono collegate da una strada se la loro distanza misura a . Esiste un percorso che attraversa ogni città esattamente una volta?
2. Quanti numeri di 7 cifre esistono tali che il prodotto delle cifre è uguale a 45^3 ?
3. È dato un triangolo acuto (tutti gli angoli sono minori di 90 gradi) ABC . Siano D, E e F i punti di intersezione delle altezze (rispetto a A, B e C) con i lati del triangolo. Sia S il punto di intersezione della retta EF con la retta perpendicolare al lato AC che passa per il punto D . Dimostra che il triangolo DES è isoscele.
4. Determina tutte le coppie (a, b) di numeri naturali tali che

$$a^2 + 3b \quad \text{e} \quad b^2 + 3a$$

sono entrambi dei quadrati.

5. Su un cerchio k ci sono cinque punti distinti A, M, B, C e D (in questo ordine), e vale $MA = MB$. Sia P il punto di intersezione delle rette AC e MD , e Q quello delle rette BD e MC . X e Y siano i punti di intersezione della retta PQ con il cerchio k . Dimostra che $MX = MY$.

Buon lavoro!