IMO-Selektion Liechtenstein 2005

Vaduz - 16. April 2005

Zeit: 4 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Zeige für alle $a, b, c \geq 0$ die Ungleichung

$$\frac{a^2}{3^3} + \frac{b^2}{4^3} + \frac{c^2}{5^3} \geq \frac{(a+b+c)^2}{6^3}.$$

Wann gilt Gleichheit?

2. Seien g und h die Tangenten durch B, respektive C an den Umkreis des beliebigen Dreiecks ABC. Die Punkte D und E liegen auf BC, sodass $AD \mid\mid g$ und $AE \mid\mid h$. Zeige

$$\frac{BD}{CE} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

3. Die natürliche Zahl n besitzt genau 16 positive Teiler

$$1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_{15} < d_{16} = n.$$

Ausserdem gilt $d_6 = 18$ und $d_9 - d_8 = 17$. Bestimme alle solchen n.

4. Finde die kleinste natürliche Zahl S, sodass folgendes gilt:
Es ist möglich die Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 9$ so auf einem Kreis anzuordnen, dass die Summe von je drei aufeinander folgenden Zahlen höchstens S beträgt.

5. Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ eine bijektive Funktion. Für jedes $n \geq 1$ gelte entweder

$f(n+1) = f(n) - 1$

oder

$f(n+1) = 3 \cdot f(n) - 1.$

Finde alle möglichen Werte von $f(1639)$.

Viel Glück!