

IMO Selektion 2004

erste Prüfung - 15. Mai 2004

Zeit: 4.5 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Sei S die Menge aller n -Tupel (X_1, \dots, X_n) , wobei X_1, \dots, X_n Teilmengen von $\{1, 2, \dots, 1000\}$ sind, die nicht alle verschieden sein müssen, und die auch leer sein können. Für $a = (X_1, \dots, X_n) \in S$ bezeichne

$$E(a) = \text{Anzahl Elemente von } X_1 \cup \dots \cup X_n.$$

Finde einen expliziten Ausdruck für die Summe

$$\sum_{a \in S} E(a).$$

2. Bestimme die grösste natürliche Zahl n , sodass

$$4^{995} + 4^{1500} + 4^n$$

eine Quadratzahl ist.

3. Sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $|AC| = |BC|$ und Inkreismittelpunkt I . Sei P ein Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks AIB , der im Dreieck ABC liegt. Die Geraden durch P , parallel zu CA und CB , schneiden AB in D und E . Die zu AB parallele Gerade durch P schneidet CA und CB in F und G . Zeige, dass sich die beiden Geraden DF und EG auf dem Umkreis des Dreiecks ABC schneiden.

IMO Selektion 2004

zweite Prüfung - 16. Mai 2004

Zeit: 4.5 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

4. Für die positiven reellen Zahlen a, b, c gelte $abc = 1$. Beweise die folgende Ungleichung:

$$\frac{ab}{a^5 + ab + b^5} + \frac{bc}{b^5 + bc + c^5} + \frac{ca}{c^5 + ca + a^5} \leq 1.$$

5. Ein *Bauklotz*, bestehend aus 7 Einheitswürfeln, hat die Form eines $2 \times 2 \times 2$ Würfels mit einem fehlenden ECKeinheitswürfel. Aus einem Würfel der Kantenlänge 2^n , $n \geq 2$, wird ein beliebiger Einheitswürfel entfernt. Zeige, dass sich der verbleibende Körper stets aus Bauklötzen aufbauen lässt.
6. Bestimme alle endlichen Folgen (x_0, x_1, \dots, x_n) reeller Zahlen, sodass die Zahl k in der Folge genau x_k mal auftritt.

IMO Selektion 2004

dritte Prüfung - 12. Juni 2004

Zeit: 4.5 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

7. Für die reellen Zahlen a, b, c, d gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{45 - \sqrt{21 - a}} \quad , & b &= \sqrt{45 + \sqrt{21 - b}}, \\ c &= \sqrt{45 - \sqrt{21 + c}} \quad , & d &= \sqrt{45 + \sqrt{21 + d}}. \end{aligned}$$

Zeige, dass gilt $abcd = 2004$.

8. Sei m eine natürliche Zahl grösser als 1. Die Folge x_0, x_1, x_2, \dots ist definiert durch

$$x_i = \begin{cases} 2^i, & \text{für } 0 \leq i \leq m-1; \\ \sum_{j=1}^m x_{i-j}, & \text{für } i \geq m. \end{cases}$$

Finde das grösste k , sodass es k aufeinanderfolgende Folgenglieder gibt, die alle durch m teilbar sind.

9. Sei X eine Menge mit n Elementen und seien A_1, A_2, \dots, A_n verschiedene Teilmengen von X . Zeige: Es gibt ein $x \in X$, sodass die Mengen

$$A_1 \setminus \{x\}, A_2 \setminus \{x\}, \dots, A_n \setminus \{x\}$$

alle verschieden sind.

IMO Selektion 2004

vierte Prüfung - 13. Juni 2004

Zeit: 4.5 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

10. Gegeben sei ein spitzwinkliges Dreieck $\triangle ABC$ mit Höhen \overline{AU} , \overline{BV} , \overline{CW} und Höhenschnittpunkt H . X liege auf \overline{AU} , Y auf \overline{BV} und Z auf \overline{CW} . X, Y und Z sind alle von H verschieden. Zeige

- (a) Wenn X, Y, Z und H auf einem Kreis liegen, gilt

$$[ABC] = [ABZ] + [AYC] + [XBC],$$

wobei $[PQR]$ die Fläche des Dreiecks $\triangle PQR$ bezeichnet.

- (b) Es gilt auch die Umkehrung von (a).

11. Finde alle injektiven Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass für alle reellen Zahlen $x \neq y$ gilt

$$f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{f(x) - f(y)}.$$

12. Finde alle natürlichen Zahlen, die sich in der Form

$$\frac{(a+b+c)^2}{abc}$$

darstellen lassen, wobei a, b und c natürliche Zahlen sind.