

Schweizer IMO - Vorselektion

Bern, Zürich - 5. April 2003

Zeit: 2 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. 67 Schüler schreiben eine Prüfung. Die Prüfung besteht aus 6 multiple-choice Fragen, die alle mit *ja* oder *nein* beantwortet werden müssen. Jeder Schüler beantwortet dabei alle 6 Fragen. Eine richtige Antwort auf die k -te Frage gibt k Punkte, eine falsche Antwort $-k$ Punkte.

- (a) Zeige, dass mindestens zwei Schüler das Prüfungsblatt gleich ausgefüllt haben.
- (b) Zeige, dass mindestens vier Schüler gleich viele Punkte erzielten.

2. ABC sei ein spitzwinkliges Dreieck mit Umkreismittelpunkt O . Das Lot von A auf BC schneide den Umkreis im Punkt $D \neq A$, und die Gerade BO schneide den Umkreis im Punkt $E \neq B$. Zeige, dass ABC und $BDC E$ denselben Flächeninhalt haben.

3. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$f((x - y)^2) = x^2 - 2yf(x) + (f(y))^2$$

4. Betrachte eine Tabelle mit m Zeilen und n Spalten. Auf wieviele Arten kann diese Tabelle mit lauter Nullen und Einsen ausgefüllt werden, sodass in jeder Zeile und jeder Spalte eine gerade Anzahl Einsen stehen?

5. Beweise für positive reelle Zahlen x, y, z mit $x + y + z = 1$ die folgende Ungleichung:

$$\frac{x^2 + y^2}{z} + \frac{y^2 + z^2}{x} + \frac{z^2 + x^2}{y} \geq 2$$