

Schweizer IMO - Selektion

erste Prüfung - 10. Mai 2003

Zeit: 4 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Für die reellen Zahlen x, y, a gelten die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}x + y &= a \\x^3 + y^3 &= a \\x^5 + y^5 &= a.\end{aligned}$$

Bestimme alle möglichen Werte von a .

2. Sei ABC ein beliebiges spitzwinkliges Dreieck. E und F seien die Fusspunkte der Höhen durch B und C . G ist die Projektion von B auf die Gerade EF und H die Projektion von C auf EF . Zeige, dass gilt

$$|HE| = |FG|.$$

3. Finde die grösste reelle Zahl C_1 und die kleinste reelle Zahl C_2 , sodass für alle positiven Zahlen a, b, c, d, e gilt

$$C_1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+e} + \frac{e}{e+a} < C_2.$$

4. Finde die grösste natürliche Zahl n , die für jede ganze Zahl a ein Teiler ist von $a^{25} - a$.
5. Auf einem Spielbrett mit 5×9 Feldern liegen n Steine, wobei zu jedem Zeitpunkt auf jedem Feld höchstens ein Stein liegen darf. Ein Spielzug besteht darin, jeden Stein in eines der angrenzenden Felder oben, unten, links oder rechts zu verschieben. Dies geschieht für alle Steine gleichzeitig. Wird dabei ein Stein in einem Zug horizontal bewegt, dann muss er im nächsten Zug vertikal bewegt werden und umgekehrt. Bestimme den grössten Wert für n , sodass es eine Anfangsposition der n Steine und eine Folge von Spielzügen gibt, sodass dieses Spiel beliebig lange fortgesetzt werden kann.

Schweizer IMO - Selektion

zweite Prüfung - 24. Mai 2003

Zeit: 4 Stunden

Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Für die positiven reellen Zahlen a, b, c gelte $a + b + c = 2$. Zeige, dass die folgende Ungleichung erfüllt ist und bestimme alle Fälle, in denen das Gleichheitszeichen steht:

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{27}{13}$$

7. Finde alle Polynome $Q(x) = ax^2 + bx + c$ mit ganzzahligen Koeffizienten, sodass drei verschiedene Primzahlen p_1, p_2, p_3 existieren mit

$$|Q(p_1)| = |Q(p_2)| = |Q(p_3)| = 11.$$

8. Sei $A_1A_2A_3$ ein Dreieck und ω_1 ein Kreis, der durch A_1 und A_2 geht. Nehme an, es existieren Kreise $\omega_2, \dots, \omega_7$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) ω_k geht durch die Punkte A_k und A_{k+1} für $k = 2, 3, \dots, 7$, $(A_i = A_{i+3})$
(b) ω_k und ω_{k+1} berühren sich äusserlich für $k = 1, 2, \dots, 6$.

Zeige: $\omega_1 = \omega_7$.

9. Gegeben sind ganze Zahlen $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{101} < 5050$, zeige, dass man daraus immer vier verschiedene a_k, a_l, a_m, a_n auswählen kann mit

$$5050 | (a_k + a_l - a_m - a_n).$$

10. Finde alle streng monotonen Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(f(n)) = 3n.$$