Schweizer IMO - Selektion

erste Prüfung - 10. Mai 2002

Zeit: 3.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

1. Gegeben sind 24 Punkte im Raum. Je drei dieser Punkte spannen eine Ebene auf, und es ist bekannt, dass die 24 Punkte auf diese Weise genau 2002 verschiedene Ebenen aufspannen. Beweise, dass eine dieser Ebenen mindestens 6 der Punkte enthält.

2. Gegeben sei ein Parallelogramm $ABCD$ und ein Punkt O in dessen Innern sodass $\sphericalangle AOB + \sphericalangle DOC = \pi$.

Zeige dass gilt:

$$\sphericalangle CBO = \sphericalangle CDO$$

3. n sei eine positive ganze Zahl mit mindestens vier verschiedenen positiven Teilern. Die vier kleinsten unter diesen Teilern seien d_1, d_2, d_3, d_4. Finde alle solchen Zahlen n, für die gilt

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n.$$

4. Betrachte ein quadratisches Feld, das durch horizontale und vertikale Linien in 7×7 Einheitsquadrate unterteilt ist. In dieses Feld wollen wir Kacheln der Form eines Schweizerkreuzes (bestehend aus einem zentralen Quadrat und den vier unmittelbar angrenzenden Quadraten oben, unten, links und rechts) hineinlegen. Dabei sollen die Kanten der Kreuze auf den Linien des Feldes zu liegen kommen. Bestimme die kleinstmögliche Anzahl Quadrate, die auf dem Feld markiert werden müssen, damit jedes Kreuz, egal wo es auf das Feld gelegt wird, mindestens ein markiertes Quadrat bedeckt.

5. Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die gilt:

(a) Die Menge $\{\frac{f(x)}{x} | x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ ist endlich

(b) $f(x - 1 - f(x)) = f(x) - 1 - x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Schweizer IMO - Selektion

zweite Prüfung - 25. Mai 2002

Zeit: 3.5 Stunden
Jede Aufgabe ist 7 Punkte wert.

6. Sei $x_1, x_2, x_3, ...$ eine Folge ganzer Zahlen mit den Eigenschaften

- $1 = x_1 < x_2 < x_3 < ...$
- $x_{n+1} \leq 2n$ für $n = 1, 2, 3, ...$

Zeige, dass es zu jeder positiven ganzen Zahl k zwei Indizes i und j gibt mit $k = x_i - x_j$.

7. Sei ABC ein gleichseitiges Dreieck und P ein Punkt in dessen Innern. X, Y und Z seien die Fusspunkte der Lote von P auf die Seiten BC, CA und AB. Zeige dass die Summe der Flächen der Dreiecke BXP, CYP und AZP nicht von P abhängt.

8. In einer Gruppe von n Leuten veranstaltet jedes Wochenende jemand eine Party, an der er alle seine Bekannten einander gegenseitig vorstellt. Nachdem jeder der n Leute einmal eine Party gemacht hat, gibt es immer noch zwei Personen unter ihnen, die sich nicht kennen.
Zeige, dass diese zwei sich auch in Zukunft nie an einer dieser Partys kennen lernen werden.
(Zwei Leute kennen sich immer gegenseitig oder gegenseitig nicht)

9. Beweise für jede positive reelle Zahl a und jedes ganze $n \geq 1$ die folgende Ungleichung.

$$a^n + \frac{1}{a^n} - 2 \geq n^2(a + \frac{1}{a} - 2)$$

und bestimme alle Fälle, in denen das Gleichheitszeichen gilt.

10. m sei eine beliebige natürliche Zahl. Bestimme in Abhängigkeit von m die kleinste natürliche Zahl k, für die gilt: Ist $\{m, m+1, ..., k\} = A \cup B$ eine beliebige Zerlegung in zwei Mengen A und B, dann enthält A oder B drei Elemente a, b, c (die nicht notwendigerweise verschieden sein müssen) mit $a^b = c$.