Das Schubfachprinzip - Lösungsskizzen

1. Man nimmt als Schubfächer die Monate und als Perlen die Personen.

2. Man kann davon ausgehen, dass ein Mensch weniger Haare auf dem Kopf hat, als New York Einwohner hat.

3. a) 367; b) 733; c) $(q-1)\cdot 366+1$ (Schaltjahr).

4. Man unterteilt das gleichseitige Dreiecke in vier kleinere gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge 1. Zwei der fünf Punkte liegen im selben kleinen Dreieck.

5. Möglich Anzahl Personen, denen man schon die Hand geschüttelt hat: $0, 1, \ldots, n-1$. Aber 0 und $n-1$ können nicht gleichzeitig vorkommen. Man hat also $n-1$ Möglichkeiten für n Personen.

6. Man unterteilt in 17 Mengen: $\{1, 52\}$, $\{4, 100\}$, $\{7, 97\}, \ldots, \{49, 55\}$ und benützt, dass $\#A = 20$. Es gibt zwei dieser Teilmengen, so dass beide Zahlen Elemente von A sind.

7. Betrachte die Koordinaten (x_i, y_i, z_i), $i = 1, \ldots, 9$, modulo 2. Man hat $2^3 = 8$ Möglichkeiten. Man nehme 2 Punkte mit denselben Koordinaten (mod 2). Ihr Mittelpunkt ist ein Gitterpunkt.

8. Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ diese Zahlen. Betrachte a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3$, $\ldots$, $a_1+a_2+\cdots+a_n$. 1. Fall: Eine dieser Summen ist $\equiv 0 \pmod{n}$. Daraus folgt die Behauptung. 2. Fall: n Summen, welche zu $n-1$ möglichen Restklassen $\pmod{n}$ gehören. Zwei deiser Summen gehören zur selben Restklasse. Ihre Differenz erfüllt die Forderungen.

9. (UK 75) Falls keiner der Punkte im Mittelpunkt liegt, könnte man die Kreisscheibe in sechs gleiche Sektoren unterteilen, so dass keiner der Punkte auf dem gemeinsamen Rand zweier Sektoren liegt. Dann müssten aber zwei Punkte in Innern eines Sektors zu liegen kommen und hätten dann einen Abstand < 1.

10. Zwei der Zahlen sind in derselben Restklasse $\pmod{11}$.

11. Seien $0 \neq a, b, c < 10^6$. Es gilt

$$|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < (1+2+2)\cdot 10^6 < 10^7 - 1$$

Der Ausdruck kann $(10^6)^3 - 1 = 10^{18} - 1$ mögliche Werte annehmen. Da $10^{18} - 1 > (10^7 - 1)\cdot 10^{11}$, gibt es zwei solche Trippel mit Differenz $< 10^{-11}$. Ihre Differenz erfüllt die Forderung.

12. Man stellt die Zahlen $i = 1, \ldots 2n$ als $i = u_i \cdot 2^{k_i}$ mit ungeradem u_i dar. Als Schubfächer wählt man die Zahlen mit gleichem u_i.

13. Schubfächer: $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$,$\ldots$, $\{2n-1, 2n\}$.

14. (IMO 72/1) Anzahl möglicher verschiedener Teilmengen: $2^{10} - 1 = 1023$, deren Summe ist immer kleiner als $10 \cdot 99 = 990$. Man nehme zwei Teilmengen mit derselben Summe und streiche die identischen Elemente heraus.

15. Betrachte die n Zahlen $1, 11, 111, \ldots, 111\ldots1$. Man unterscheidet zwei Fälle: 1. Fall: Eine dieser Zahlen ist $\equiv 0 \pmod{n}$. Daraus folgt die Behauptung. 2. Fall: Zwei dieser Zahlen sind kongruent $\pmod{n}$. Die Differenz dividiert durch höchst mögliche Zehnerpotenz 10^k erfüllt die Bedingungen.

16. Sei d eine der Geraden. d muss zwei gegenüberliegende Seiten des Quadrates schneiden. Man zeichnet die Strecke parallel zu diesen Seiten, die durch den Mittelpunkt geht. d muss diese Strecke auch $2 : 3$ teilen. d muss also durch einer von zwei Punkten auf dieser Strecke gehen. Man zeichnet auch die entsprechenden Punkte bezüglich der anderen Seiten ein. Jeder der neun Geraden muss durch einen dieser vier Punkte gehen; einer der vier Punkte wird von drei Geraden durchlaufen.

17. Es gibt $2^{r+1} - 1$ mögliche Produkte. Man stellt die Primfaktorpotenzen der Produkte modulo 2 dar, also in der Form $(1, 0, 0, 1, \ldots, 0)$. Es gibt 2^r Möglichkeiten. Zwei Produkte haben dieselbe Darstellung. Ihr Produkt ist eine Quadratzahl. Man diviert durch das Quadrat der gemeinsamen Faktoren.

18. Betrachte eine Person P_1. OBdA kennt sie mindestens 3 Personen. Wenn zwei davon sich kennen ist die Behauptung bewiesen, andernfalls kennen sich diese drei Personen gegenseitig nicht.

19. (IMO 64/4) Betrachte eine Person P_1. Sie schreibt an 16 Personen über 3 Themen. Es gibt ein Thema T_1, über welches P_1 an mindestens 6 Personen schreibt. Schreiben zwei davon untereinander über T_1, dann folgt die Behauptung, sonst wendet man das Resultat der vorhergehenden Aufgabe an.

20. (IMO 92/3) Wir haben $\binom{9}{2} = 36$ Kanten. Wenn drei Kanten ungefärbt bleiben, kann man je einen ihrer Endpunkte weglassen. Es bleiben 6 Punkte, deren Verbindungskanten alle eingefärbt sind. Wegen Aufgabe 18 erfüllt $n = 33 = 36 - 3$ die Bedingungen. Man beweist nun, dass $n = 32$ die Bedingung nicht erfüllt. In der Abbildung 1 sind fünf Punkte $Q_1, \ldots, Q_5$ so miteinander verbunden, dass es kein einfarbiges Dreieck gibt. Die restlichen vier Punkte $P_1, \ldots, P_4$ werden vier verschiedenen Eckpunkten $Q_1, \ldots, Q_4$ des Fünfecks zugeordnet. Nun werden nacheinander die Punkte P_i mit allen Punkten ausser Q_i verbunden. Und zwar in der Farbe, in welcher der jeweilige Punkt mit Q_i verbunden ist. Damit erhält man 32 gefärbte Kanten ohne einfarbiges Dreieck. Die Lösung ist $n = 33$.

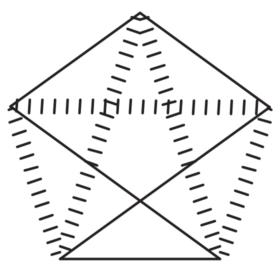

Abb. 1: Zur Lösung 20

21. Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Nach $n + 1$ Schritten gibt es zwei Fusstritte mit Abstand $d < 1/n < \varepsilon$. Weiterlaufen. Plumps.

22. Sei $\varepsilon = 10^{-10}$. Der Mann mit Schrittlänge 1 auf dem Einheitskreis wird nach n Schritten ins Loch mit Länge ε um $(1, 0)$ fallen, da $\pi \notin \mathbb{Q}$ (siehe Aufgabe 21).

23. Wir haben $k + log_{10}(999999) < n \cdot log_{10}(2) < k + 6$. Der Mann mit Schrittlänge $\log_{10}(2)$ wird ins Loch mit Länge $\varphi = 6 - \log_{10}(999999)$ fallen (siehe Aufgabe 21).

24. (IMO 85/4) Es hat 9 verschiedene mögliche Primteiler $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$ und 2^9 verschiedene Darstellungen vermittels der Primfaktorpotenzen modulo 2. Wir bilden Paare von Zahlen in M mit derselben Darstellung abspalten. Ihr Produkt ist stets eine Quadratzahl. Wir haben midestens $\frac{1985-(2^9-1)}{2} = 737 > 2^9$ solche Produkte. Man kann die Überlegung wiederholen mit den Wurzeln der Produkte.

25. (IMO 78/6) Annahme: die Behauptung sei falsch. Es hat 1978 Personen aus 6 Ländern. Es gibt also ein Land A mit mindestens 330 Teilnehmern mit den Nummern $a_1 < a_2 < \cdots < a_{330}$. Betrachte die 329 Differenzen $a_{330} - a_i$ für $1 \leq i \leq 329$. Die 329 Personen mit diesen Nummern dürfen nicht aus A kommen, also kommen sie aus den fünf restlichen Ländern. Ein Land B ist Herkunftsland von mindestend 66 dieser Personen. Sie haben die Nummern $b_1 < b_2 < \cdots < b_{66}$. Die 65 Personen mit den Nummern $b_{66} - b_i$ für $1 \leq i \leq 65$ kommen weder aus A noch aus B. Mindestens 17 dieser Personen kommen aus einem Land C. Sie haben die Nummern $c_1 < c_2 < \cdots < c_{17}$. Die Personen mit den Nummern $c_{17} - c_i$ für $1 \leq i \leq 16$ kommen nicht aus A, B oder C. Es gibt ein weiteres Land D, welches Herkunftsland von mindestenskommen 6 dieser Presonen ist. Sie haben die Nummern $d_1 < d_2 < \cdots < d_6$. Die 5 Personen mit den Nummern $d_6 - d_i$ für $1 \leq i \leq 5$ kommen nicht aus A, B, C oder D. Wiederum muss eines der beiden letzten Länder, welches wir E nennen wollen, mindestens 3 dieser Personen enthalten, mit Nummern $e_1 < e_2 < e_3$. Die zwei Personen mit den Nummern $f_2 = e_3 - e_1$ und $f_1 = e_3 - e_2$ kommen nicht aus A, B, C, D oder E, sie entstammen also F. Die Person mit der Nummer $f_2 - f_1$ kommt nicht aus A, B, C, D, E oder F. Widerspruch.

26. (IMO 76/5) Betrachte Vektoren $(x_1, \ldots, x_q)$ mit $x_i \in \mathbb{Z}$ und $|x_i| \leq p$. Es gibt $(2p+1)^q$ solche Vektoren. Der Vektor

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q \end{pmatrix}$$

genügt folgenden Bedingungen: $y_j \in \mathbb{Z}$ und $|y_j| \leq p \cdot q$, da $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$. Es gibt $(2 \cdot pq + 1)^p$ Vektoren, die diese Bedingungen erfüllen. Da $(2p+1)^q = (4p^2 + 4p + 1)^p > (2pq + 1)^p = (4p^2 + 1)^p$, gibt es zwei Vektoren $(x_1, \ldots, x_q)$ und $(\hat{x}_1, \ldots \hat{x}_q)$, welche denselben Vektor $(y_1 \ldots y_p)$ ergeben. Setze $z_i := x_i - \hat{x}_i$. Der Vektor $(z_1, \ldots, z_q)$ erfüllt die Bedingungen.

27. (IMO 75/2) Es gibt eine unendliche Teilfolge, deren Elemente alle kongruent sind modulo a_1. OBdA seien dies $a_2, a_3, a_4, \ldots$ D.h. a_1 teilt $a_i - a_2$ für alle $i > 2$. Für alle $i > 2$ gibt es ein x_i, so dass $x_i \cdot a_1 = a_i - a_2$, d.h. $a_i = x_i \cdot a_1 + a_2$.

28. Jeder Zahl n ordne man zwei Zahlen S_n und F_n zu. S_n sei die maximale Länge einer steigenden Folge, die man durch heraustreichen beliebig vieler Zahlen erhält und die mit n beginnt. F_n sei die maximale Länge einer fallenden Folge ist, die mit n beginnt. Falls $m \neq n$, dann $(S_m, F_m) \neq (S_n, F_n)$. Annahme: die Behauptung sei falsch. Dann wäre $S_n, F_n \leq 10$ für alle $n = 1, \ldots, 101$. Dann müssten sich die 101 Zahlen $10^2 = 100$ möglichliche (S_n, F_n) teilen. Widerspruch.