

# Das Schubfachprinzip

Das Dirichletsche Schubfachprinzip sagt folgendes aus:

Werden  $k \cdot n + 1$  Perlen auf  $n$  Schubfächer verteilt, so enthält wenigstens ein Schubfach mehr als  $k$  Perlen.

Trotz seiner Einfachheit hat es erstaunlich viele Anwendungen. Viele Existenzbehauptungen über endliche Mengen sind mit dem Schubfachprinzip beweisbar. Die Hauptschwierigkeit ist dabei die Identifizierung der 'Perlen' und der 'Schubfächer'. Bei der Suche eines mehrfach besetzten 'Schubfachs' liefert es allerdings keine Hilfe.

1. Unter 13 Personen gibt es stets zwei, die im selben Monat geboren sind.
2. Man beweise, dass in New York zwei Personen leben, die gleich viele Haare auf dem Kopf haben.
3. Wie viele Personen braucht man, um mit Sicherheit behaupten zu können, dass a) zwei; b) drei; c)  $q$  Personen denselben Geburtstag haben?
4. In einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge 2 liegen 5 Punkte. Zeige: Zwei der Punkte haben einen Abstand  $\leq 1$ . Was kann man aussagen, wenn 17 Punkte im Dreieck liegen?
5. In einem Raum sind  $n$  Personen, die sich zur Begrüßung die Hände schütteln. Zeige: In jedem Zeitpunkt gibt es zwei Personen, die gleich vielen Leuten die Hände geschüttelt haben.
6. Sei  $A \subset \{1, 4, 7, \dots, 100\}$  und  $A$  habe 20 Elemente. Zeige: Es gibt  $a, b \in A$  mit  $a+b = 104$ .
7. Es seien 9 Gitterpunkte im 3-dimensionalen Raum gegeben (Gitterpunkte sind Punkte mit ganzzahligen Koordinaten). Zeige: Es gibt einen Gitterpunkt, der im Innern der Verbindungsstrecke von zwei dieser 9 Punkte liegt.
8. Beweise: Jede Menge von  $n$  natürlichen Zahlen enthält eine nichtleere Teilmenge, so dass gilt: Die Summe der Elemente dieser Teilmenge ist durch  $n$  teilbar.
9. Eine abgeschlossene Kreisscheibe vom Radius 1 enthalte sieben Punkte, deren gegenseitige Abstände  $\geq 1$  sind. Zeige, dass der Kreismittelpunkt einer der sieben Punkte ist.
10. Gegeben sind 12 verschiedene zweistellige Zahlen. Zeige, dass man aus ihnen zwei Zahlen auswählen kann, deren Differenz eine zweistellige Zahl mit zwei gleichen Ziffern ist.
11. Zeige: es gibt ganze Zahlen  $a, b$  und  $c$  mit  $|a| < 10^6$ ,  $|b| < 10^6$  und  $|c| < 10^6$ , so dass gilt:  $|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-11}$ , wobei  $a, b$  und  $c$  nicht alle gleich Null sind.
12. Zeige: Unter  $n + 1$  Zahlen aus  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  gibt es stets zwei Zahlen, so dass die eine durch die andere teilbar ist.
13. Zeige: Unter  $n + 1$  Zahlen aus  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  gibt es stets zwei teilerfremde.
14. Beweise, dass jede Menge bestehend aus 10 natürlichen Zahlen zwischen 1 und 99 zwei disjunkte nichtleere Teilmengen hat, deren Elemente dieselbe Summe haben.

15. Es sei  $n$  eine natürliche Zahl, die weder durch 2 noch durch 5 teilbar ist. Zeige, dass es dann ein Vielfaches von  $n$  gibt, dessen Ziffern alle gleich 1 sind (im Dezimalsystem).
16. Jede von neun Geraden zerlege ein Quadrat in zwei Vierecke, deren Flächeninhalte sich wie  $2 : 3$  verhalten. Zeige, dass mindestens drei dieser neun Geraden durch einen Punkt gehen.
17. Es seien  $r + 1$  natürliche Zahlen gegeben mit insgesamt nur  $r$  verschiedenen Primteilern. Zeige, dass es eine Teilmenge der Menge dieser Zahlen gibt, so dass deren Produkt eine Quadratzahl ist.
18. Zeige: Unter 6 Personen gibt es stets drei, die sich gegenseitig kennen, oder drei, die sich gegenseitig nicht kennen.
19. Jede von 17 Personen steht im Briefwechsel mit jeder anderen. Sie korrespondieren über drei Themen und je zwei Personen behandeln genau ein Thema. Zeige, dass es mindestens drei Personen gibt, die untereinander ein und dasselbe Thema behandeln.
20. Man betrachte neun Punkte im Raum, wobei keine vier in einer Ebene liegen. Je zwei Punkte seien durch eine Kante (= Verbindungsstrecke) verbunden, und jede Kante wird entweder blau gefärbt oder rot gefärbt oder sie bleibt ungefärbt. Man bestimme den kleinsten Wert  $n$ , so dass gilt: Wie immer man auch genau  $n$  Kanten färbt, so erhält man notwendigerweise stets ein Dreieck mit gleich gefärbten Kanten.
21. Gegeben sei ein Kreis mit Umfang 1. Ein Mann mit irrationaler Schrittlänge  $a$  (längs dem Kreisumfang gemessen) geht um den Kreis herum. Der Kreis habe ein Loch der Breite  $\varepsilon > 0$ . Zeige, dass der Mann früher oder später ins Loch treten wird.
22. Zeige, dass es eine natürliche Zahl  $n$  gibt, so dass  $|\sin n| < 10^{-10}$  ist.
23. Zeige, dass es eine Zweierpotenz gibt, die mit sechs Neunen beginnt. Das heisst, es gibt natürliche Zahlen  $n$  und  $k$ , so dass

$$999999 \cdot 10^k < 2^n < 10^{k+6}.$$

24. Gegeben sei eine Menge  $M$  von 1985 verschiedenen natürlichen Zahlen, wobei keine dieser Zahlen einen Primteiler grösser als 26 habe. Beweise, dass  $M$  eine Teilmenge von vier Zahlen hat, deren Produkt die vierte Potenz einer natürlichen Zahl ist.
25. Die Mitglieder einer internationalen Gesellschaft kommen aus sechs verschiedenen Ländern. Die Liste der Mitglieder enthält 1978 Namen, welche mit  $1, 2, \dots, 1978$  numeriert sind. Beweise, dass es ein Mitglied gibt, dessen Nummer gleich der Summe der Nummern zweier Mitglieder aus seinem eigenen Land, oder gleich dem Doppelten der Nummer eines Mitgliedes aus seinem eigenen Land ist.
26. Gegeben sei folgendes System von  $p$  Gleichungen mit  $q = 2p$  Unbekannten:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1q}x_q &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2q}x_q &= 0 \\ &\vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pq}x_q &= 0 \end{aligned}$$

wobei  $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$  für alle  $1 \leq i \leq p$  und  $1 \leq j \leq q$ . Man beweise, dass eine Lösung  $(x_1, x_2, \dots, x_q)$  dieses Systems mit folgenden Eigenschaften existiert:

- (a) alle  $x_j$  (für  $j = 1, 2, \dots, q$ ) sind ganzzahlig,
  - (b) mindestens eines der  $x_j$  ist ungleich 0,
  - (c)  $|x_j| \leq q$  für alle  $j = 1, 2, \dots, q$ .
- 27.** Es sei  $a_1, a_2, a_3, \dots$  eine Folge natürlicher Zahlen mit  $a_k < a_{k+1}$  für alle  $k \geq 1$ . Zeige, dass es zwei Elemente  $a_p, a_q$  in dieser Folge gibt ( $p \neq q$ ), so dass unendlich viele  $a_m$  dieser Folge in der Form  $a_m = x \cdot a_p + y \cdot a_q$  mit geeigneten natürlichen Zahlen  $x, y$  geschrieben werden können.
- 28.** Die natürlichen Zahlen von 1 bis 101 werden in beliebiger Reihenfolge hingeschrieben. Zeige, dass man 90 dieser Zahlen so wegstreichen kann, dass die verbleibenden Zahlen entweder eine monoton steigende oder eine monoton fallende Folge bilden.