



## Das Invarianzprinzip

Wird eine bestimmte Operation wiederholt ausgeführt, kann man nach bestimmten Grössen suchen, die sich bei dieser Operation nicht verändern. Solche Grössen heissen *Invarianten*. Oft möchte man zeigen, dass man aus einer gegebenen Ausgangsposition eine bestimmte Endposition nicht durch eine Folge von Operationen erreichen kann. Es genügt dann, eine Invariante zu finden, welche am Anfang einen anderen Wert hat, als am Schluss. Daraus folgt unmittelbar, dass eine solche Folge von Operationen nicht existiert.

**Beispiel 1.** Sei  $n$  eine natürliche Zahl. An einer Tafel stehen die Zahlen  $1, 2, \dots, 4n$ . Man wählt nun wiederholt zwei beliebige Zahlen  $a, b$  aus, wischt sie durch und schreibt stattdessen  $|a - b|$  an die Tafel. Zeige, dass die letzte Zahl stets gerade ist.

*Lösung.* Wir suchen nach einer Grösse, die sich während der Operation nicht ändert. Das einzige was passiert, ist dass zwei Zahlen  $a$  und  $b$  ausgewählt, weggewischt und durch  $|a - b|$  ersetzt werden. Alle anderen Zahlen bleiben unverändert an der Tafel. Wir können annehmen, dass  $a \geq b$  ist. Dann gilt  $|a - b| = a - b$  und die Operation lautet  $a, b \mapsto a - b$ . Insbesondere ändert sich die *Summe* der Zahlen an der Tafel um  $-2b$ , also um eine *gerade* Zahl. Dies bedeutet aber gerade, dass die Summe der Zahlen *modulo 2* eine Invariante ist. Am Anfang beträgt sie  $1 + 2 + \dots + 4n = 2n(4n + 1) \equiv 0 \pmod{2}$ . Am Schluss ist sie einfach die letzte verbleibende Zahl. Somit ist diese gerade, wie behauptet. □

Manchmal ist man nicht an einer eigentlichen Invarianten interessiert, sondern an einer Grösse, die bei jeder Operation grösser oder kleiner wird, einer sogenannten *Monovariante*. Typischerweise möchte man zeigen, dass eine gewisse Folge von Operationen nach einer endlichen Zeit abbrechen muss. Dann genügt es zum Beispiel folgendes zu zeigen: Es gibt eine Grösse, die zu jedem Zeitpunkt eine nichtnegative *ganze* Zahl ist, und die bei jeder Operation kleiner wird. Offenbar kann diese Grösse nur endlich oft kleiner werden, da sie sonst irgendwann negativ wird. Also kann nur eine endlich Zahl von Operationen stattfinden. Wir geben ein Beispiel.

**Beispiel 2.** Im Parlament von Sikinia hat jeder Abgeordnete höchstens 3 Feinde. Zeige, dass man die Parlamentarier so in zwei Häuser verteilen kann, dass jeder in seinem Haus höchstens einen Feind hat.

*Lösung.* Hier ist gar keine Operation in Sicht. Die Idee ist, eine einzuführen. Verteile die Parlamentarier irgendwie in zwei Häuser. Anschliessend führen wir folgende Operation wiederholt durch: Wenn jemand mindestens zwei Feinde im gleichen Haus hat, dann verschiebe ihn ins andere Haus. Wir zeigen nun, dass diese Operation nur endlich oft durchgeführt werden kann. Daraus folgt unmittelbar, dass am Schluss jeder Parlamentarier höchstens einen Feind im eigenen Haus hat. Sie  $S$  die Anzahl Feindschaften, also die Anzahl ungeordneter

Paare von Parlamentariern, die im selben Haus sind und die befeindet sind. Wenn ein Parlamentarier  $P$  mit mindestens zwei Feinden in seinem Haus ins andere Haus wechselt, dann hat er neu mindestens einen Feind weniger. Zwei von  $P$  verschiedene Parlamentarier sind nach dieser Verschiebung genau dann befeindet, wenn sie es auch schon vorher waren. Das bedeutet aber, dass  $S$  bei jeder Operation um mindestens 1 kleiner wird. Wegen  $S \geq 0$  muss diese Verschiebungsgeschichte nach endlicher Zeit abbrechen. Dies war zu zeigen.  $\square$

Als letztes geben wir noch ein Beispiel mit einer Monovariante, wo nicht das Abbrechen eines Verfahrens entscheidend ist.

**Beispiel 3.** Seien  $a, b, c$  ganze Zahlen, die nicht alle gleich sind. In einem Schritt wird das Tripel  $(a, b, c)$  durch das neue Tripel  $(a - b, b - c, c - a)$  ersetzt. Zeige, dass nicht alle drei Koordinaten dieses Tripels beschränkt bleiben können.

*Lösung.* Sei  $(a_n, b_n, c_n)$  das Tripel nach dem  $n$ -ten Schritt. Offenbar gilt  $a_n + b_n + c_n = 0$  für  $n \geq 1$ . Das hilft aber nicht direkt. Die Idee ist, dass man  $(a_n, b_n, c_n)$  als Punkt im dreidimensionalen Raum betrachtet. Eine naheliegende Grösse wäre dann der Abstand vom Nullpunkt, oder einfacher: dessen Quadrat  $A_n$ . Es gilt

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 = (a_n - b_n)^2 + (b_n - c_n)^2 + (c_n - a_n)^2 \\ &= 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2) - 2a_n b_n - 2b_n c_n - 2c_n a_n = 2A_n - 2(a_n b_n + b_n c_n + c_n a_n). \end{aligned}$$

Ausserdem ist ja für  $n \geq 1$

$$0 = (a_n + b_n + c_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + 2(a_n b_n + b_n c_n + c_n a_n).$$

Addiert man diese beiden Gleichungen, dann folgt

$$A_{n+1} = 3A_n,$$

also induktiv  $A_{n+1} = 3^n A_1$ . Da  $a, b, c$  nicht alle gleich sind, gilt  $A_1 > 0$  und somit wächst  $A_n$  über alle Schranken. Dies bedeutet aber, dass die drei Koordinaten  $a_n, b_n, c_n$  nicht alle beschränkt bleiben können.  $\square$

## Aufgaben

1. Ein Kreis ist in 6 Sektoren unterteilt, in denen die Zahlen 1, 0, 1, 0, 0, 0 in dieser Reihenfolge stehen. Man kann gleichzeitig zwei benachbarte Zahlen um 1 erhöhen. Ist es möglich, dass irgendwann alle 6 Zahlen gleich sind?
2. Gegeben ist ein gewöhnliches Schachbrett. Man darf alle Felder in einer Zeile oder Spalte oder eines  $2 \times 2$  Quadrats umfärben. Kann man erreichen, dass am Schluss nur noch ein schwarzes Feld übrigbleibt?
3. Jede der Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ist gleich 1 oder  $-1$ . Es gelte

$$a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4 a_5 + \dots + a_n a_1 a_2 a_3 = 0.$$

Zeige, dass  $n$  durch 4 teilbar ist.

4. Starte mit den Zahlen 3, 4, 12. In jedem Zug darf man zwei der Zahlen  $a, b$  auswählen und durch  $0.6a - 0.8b$  und  $0.8a + 0.6b$  ersetzen. Kann man nach endlich vielen Zügen 4, 6, 12 erreichen?
5. Auf dem Umfang eines Kreises sind  $n$  Punkte markiert. Auf jedem Punkt liegt ein Stein. In einem Zug werden zwei beliebige Steine in entgegengesetzte Richtung um einen Punkt verschoben. Am Ende sollen alle Steine auf einem Punkt liegen. Wann ist das möglich?
6. Jede der Zahlen  $1, 2, \dots, 10^6$  wird durch ihre Quersumme ersetzt. Diese Operation wird solange durchgeführt, bis  $10^6$  einstellige Zahlen entstehen. Kommen darunter mehr Einsen oder mehr Zweien vor?
7. In jeder Ecke eines Würfels steht die Zahl 1 oder  $-1$ . In jeder Seitenfläche steht das Produkt der vier Zahlen in den angrenzenden Ecken. Finde alle möglichen Werte der Summe dieser 14 Zahlen.
8. Auf einer Insel leben 13 blaue, 15 weiße und 17 rote Chamäleons. Wenn sich zwei verschiedenfarbige treffen, ändern beide ihre Farbe in die dritte Farbe. Können alle dieselbe Farbe bekommen?
9. In einer Reihe stehen 1000 Zahlen. Nun wird eine zweite Zeile gebildet nach folgender Regel: Unter jeder Zahl  $a$  in der ersten Zeile steht, wie oft  $a$  in der ersten Zeile vorkommt. Aus der zweiten Zeile wird analog eine dritte gebildet etc. Zeige, dass irgendwann eine Zeile mit der nächsten übereinstimmt.
10. (CH 04) An einer Wandtafel steht eine Liste natürlicher Zahlen. Es wird nun wiederholt die folgende Operation ausgeführt: Wähle zwei beliebige Zahlen  $a, b$  aus, wische sie aus und schreibe an deren Stelle  $\text{ggT}(a, b)$  und  $\text{kgV}(a, b)$ . Zeige, dass sich der Inhalt der Liste ab einem bestimmten Zeitpunkt nicht mehr verändert.
11. Die Felder eines  $4 \times 4$ -Bretts sind wie folgt mit Zahlen gefüllt:

$$\begin{array}{cccc}
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & -1 & 1 & 1
 \end{array}$$

Man darf jeweils die Vorzeichen aller Zahlen in einer Zeile, Spalte oder Parallelen zu einer Diagonalen ändern. Zeige, dass stets mindestens eine  $-1$  übrigbleibt.

12. Zu einem Bankett sind  $2n$  Leute eingeladen. Jede dieser Personen hat höchstens  $n - 1$  Feinde unter den anderen Leuten. Beweise, dass diese  $2n$  Leute an einem runden Tisch Platz nehmen können, sodass niemand neben einem Feind sitzt.
13. Drei Automaten  $Q, R, S$  drucken Paare natürlicher Zahlen auf Papierkarten. Zur Eingabe  $(x, y)$  liefern  $Q, R, S$  die Karten  $(x - y, y), (x + y, y)$  bzw.  $(y, x)$ . Am Anfang hat man nur die Karte  $(1, 2)$ . Kann man damit  $(19, 79)$  oder  $(819, 357)$  erhalten? Welche Paare  $(p, q)$  kann man ausgehend von  $(a, b)$  erreichen?
14. In jedem Feld eines gewöhnlichen Schachbrettes steht eine ganze Zahl. In jedem Zug darf man ein beliebiges  $3 \times 3$ - oder  $4 \times 4$ -Quadrat auswählen und dort alle Zahlen um 1 erhöhen. Kann man für jede Ausgangstabelle erreichen, dass am Ende in jedem Feld eine a) gerade, b) durch 3 teilbare Zahl steht?

15. (IMO 86) In jedem Eckpunkt eines 5-Ecks steht eine ganze Zahl, sodass die Summe dieser 5 Zahlen positiv ist. Sind  $x, y, z$  die Zahlen in drei aufeinanderfolgenden Ecken und ist  $y < 0$ , dann ist folgende Operation erlaubt: Ersetze  $x, y, z$  durch  $x+y, -y, z+y$ . Entscheide, ob man stets nach endlich vielen Schritten abbrechen muss.
16. 9 Felder eines  $10 \times 10$  Brettes sind infiziert. Jede Sekunde infizieren sich alle Felder, die mit mindestens 2 infizierten Feldern eine Kante gemeinsam haben. Kann sich die Infektion über das ganze Brett ausbreiten?
17. In der Folge  $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$  sei jede Zahl ab der siebten gleich der Summe der vorhergehenden 6 Zahlen modulo 10. Zeige, dass in dieser Folge  $\dots, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$  nicht vorkommen kann.
18. (Kontsevitch) Betrachte in der Ebene alle Punkte mit ganzzahligen Koordinaten. Die Punkte  $(0, 0), (1, 0), (2, 0), (0, 1), (1, 1), (0, 2)$  sind rot markiert.
- Auf jedem der 6 roten Punkte liegt ein Chip.
  - Nur auf dem Punkt  $(0, 0)$  liegt ein Chip.

Liegt ein Chip auf dem Punkt  $(x, y)$  und sind die Punkte  $(x, y + 1)$  und  $(x + 1, y)$  unbesetzt, dann kann man den Chip vom Punkt  $(x, y)$  entfernen und stattdessen je einen Chip auf die Punkte  $(x, y + 1)$  und  $(x + 1, y)$  setzen. Ist es in den Fällen a) bzw. b) möglich, alle Chips von den roten Punkten zu entfernen?

19. (Conway) Betrachte in der Ebene alle Punkte mit ganzzahligen Koordinaten. Auf allen Punkten  $(x, y)$  mit  $y \leq 0$  befindet sich ein Chip. Man kann nun mit einem Chip horizontal oder vertikal über einen Chip auf einen angrenzenden unbesetzten Punkt springen und den übersprungenen Chip entfernen (Solitarsprung). Ist es möglich, dass nach endlich vielen Zügen Ein Chip auf dem Punkt  $(0, 5)$  liegt?
20. (IMO 93) Auf einem unendlichen Schachbrett wird folgendes Spiel gespielt: Zu Beginn sind  $n^2$  Spielsteine zu einem  $n \times n$ -Quadrat von benachbarten Feldern so angeordnet, dass auf jedem dieser Felder ein Spielstein liegt. Man kann nun wiederholt Solitarsprünge ausführen und den übersprungenen Spielstein nach dem Sprung entfernen. Bestimme alle Werte von  $n$ , für die das Spiel mit nur einem verbleibenden Spielstein beendet werden kann.
21. Starte mit 4 kongruenten, rechtwinkligen Dreiecken. In einem Schritt kann man ein beliebiges Dreieck auswählen und mit der Höhe des rechten Winkels in zwei Teile zerschneiden. Zeige, dass es unmöglich ist, lauter kongruente Dreiecke zu erhalten, wenn das Zerschneiden erst einmal begonnen hat.
22. (IMO 2000) Sei  $n \geq 2$  eine natürliche Zahl. Am Anfang befinden sich  $n$  Flöhe auf einer horizontalen Linie, nicht alle auf demselben Punkt. Sei  $\lambda$  eine positive reelle Zahl. Ein *Sprung* ist wie folgt definiert:
- Wähle zwei Flöhe aus, die sich in  $A$  und  $B$  befinden mit  $A$  links von  $B$ . Der Floh in  $A$  springt auf den Punkt  $C$  rechts von  $B$  mit  $BC/AB = \lambda$ .
- Bestimme alle Werte von  $\lambda$ , sodass für jeden Punkt  $M$  auf der Linie und jede Anfangsposition der  $n$  Flöhe eine endliche Folge von Sprüngen existiert, die alle Flöhe auf Positionen rechts von  $M$  bringt.