Anordnen und Extremalprinzip

1. In einem Gebiet befinden sich n Häuser und n Brunnen. Jedes Haus soll mit einer geradlinigen Wasserleitung mit einem Brunnen verbunden werden, sodass keine zwei Häuser mit dem gleichen Brunnen verbunden sind. Zeige, dass dies stets möglich ist, ohne dass zwei Wasserleitungen sich kreuzen.

2. Jeder Gitterpunkt in der Ebene ist mit einer natürlichen Zahl beschriftet, sodass die Zahl an jedem Gitterpunkt gleich dem Durchschnitt der 4 Zahlen an den benachbarten Punkten ist. Zeige, dass alle Zahlen gleich sind.

3. In der Ebene liegen $2n + 2$ Punkte, sodass keine drei kollinear sind. Zeige, dass zwei dieser Punkte eine Gerade bestimmen, welche die übrigen Punkte in zwei gleichgrosse Gruppen zerlegen.

4. Ein Würfel lässt sich nicht in paarweise verschieden grosse kleinere Würfel zerlegen.

5. In der Ebene sind n Punkte gegeben. Je drei dieser Punkte bilden ein Dreieck mit Flächeninhalt ≤ 1. Zeige, dass alle Punkte in einem Dreieck mit Flächeninhalt ≤ 4 liegen.

6. 10 Zahlen liegen im offenen Intervall $]1, 55[$. Zeige, dass drei dieser Zahlen die Seitenlängen eines Dreiecks sind.

7. An 33 Leute wurden 1600 Geschenke verteilt. Zeige, dass mindestens 4 Leute gleichviele Geschenke bekommen haben.

8. In der Ebene sind $n > 2$ Geraden gegeben, von denen keine zwei parallel sind. Durch jeden Schnittpunkt von zwei Geraden geht mindestens noch eine weitere. Zeige, dass alle Geraden durch einen Punkt gehen.

9. In einem Turnier spielt jeder Teilnehmer genau einmal gegen jeden anderen. Es gibt keine Unentschieden. Nach dem Turnier macht jeder Spieler eine Liste mit den Namen aller Teilnehmer, die er besiegt hat und den Namen aller, die gegen einen von ihm besiegten Spieler verloren haben. Zeige, dass mindestens ein Teilnehmer die Namen aller anderen Spieler auf seiner Liste hat.

10. (Sylvester) Falls $n > 2$ Punkte in der Ebene nicht alle auf einer Geraden liegen, dann gibt es eine Geraden, die durch genau zwei der Punkte geht.

11. Sei M eine Menge von Punkten in der Ebene. Für je zwei Punkte aus M liegt der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke dieser Punkte wieder in M. Zeige, dass M unendlich viele Punkte enthält.

12. $2n + 1$ reelle Zahlen haben die Eigenschaft, dass die Summe von je n dieser Zahlen kleiner ist, als die Summe der restlichen $n + 1$. Zeige, dass diese Zahlen alle positiv sind.

13. Von $2n + 3$ Punkten in der Ebene seien keine drei kollinear und keine vier liegen auf einem Kreis. Zeige, dass es einen Kreis durch drei dieser Punkte gibt, in dessen Innern genau n der übrigen Punkte liegen.

14. In einem Land gibt es n Städte. Je zwei davon sind durch genau eine Einbahnstrasse verbunden. Zeige, dass es eine Stadt gibt, von der aus man jede andere Stadt entweder direkt oder über höchstens eine andere Stadt erreichen kann.

15. Gegeben sind $4n$ Punkte in der Ebene, keine drei kollinear. Zeige, dass man n (nicht unbedingt konvexe) Vierecke mit diesen Punkten als Eckpunkten finden kann, die alle disjunkt sind.

16. Jedes konvexe Polygon mit Fläche 1 ist enthalten in einem Rechteck mit Fläche 2.

17. 69 verschiedene positive ganze Zahlen seien alle ≤ 100. Zeige, dass man vier dieser Zahlen a, b, c, d auswählen kann mit $a + b + c = d$. Gilt dies auch für 68 Zahlen?

18. In jedem konvexen n-Eck gibt es drei aufeinanderfolgende Ecken A, B, C, sodass der Umkreis des Dreiecks ABC das ganze n-Eck enthält.

19. Eine endliche Zahl von Polygonen habe die Eigenschaft, dass je zwei dieser Polygone einen gemeinsamen Punkt haben. Zeige, dass eine Gerade existiert, die jedes Polygon schneidet.

20. Sechs verschieden grosse Kreise verlaufen durch einen gemeinsamen Punkt. Zeige, dass das Zentrum des einen Kreises im Innern eines anderen liegt.

21. (IMO 03) Sei A eine 101-elementige Teilmenge von $S = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$. Beweise, dass es Zahlen $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ aus S gibt, sodass die Mengen

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\} \quad j = 1, 2, \ldots, 100$$

paarweise disjunkt sind.

22. In der Ebene sind n Punkte gegeben. Zeige, dass man drei der Punkte auswählen kann, sodass der Kreis durch diese Punkte keinen der anderen Punkte im Innern enthält.

23. (IMO 71) Offenbar dominieren n Türme ein $n \times n$-Schachbrett. Was ist aber die kleinste Zahl Türme, die ein $n \times n \times n$-Schachwürfel dominieren kann?

24. (Ungarn 73) $n \geq 5$ Ebenen in allgemeiner Lage zerlegen den Raum in Gebiete. Zeige, dass mindestens $(2n - 3)/4$ dieser Gebiete Tetraeder sind.