Lösungen Zählaufgaben Kombinatorik

1. a) Man stelle sich vor, man wähle eine Ziffer nach der anderen, und zwar von links nach rechts. Der Anzahl Möglichkeiten pro Ziffer entsprechend hat man insgesamt $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \underline{4536}$ Möglichkeiten, eine solche Zahl zu wählen.

b) Bei dieser Aufgabe macht die Null Probleme, weil sie nicht am Anfang stehen darf. Man wählt also zuerst die erste Ziffer (von links) (9 Möglichkeiten), dann die beiden zusätzlich vorkommenden Ziffern ($\binom{9}{2}$ Möglichkeiten). Nun unterscheidet man zwei Fälle:
Im ersten Fall kommt die erste Ziffer zweimal vor: Also gibt es 3! Möglichkeiten die drei verschiedenen Ziffern zu verteilen.
Im zweiten Fall kommt die erste Ziffer nur einmal vor: Es gibt 2 Möglichkeiten, die Ziffer zu wählen, die zweimal vorkommen soll, und anschliessend 3 Möglichkeiten, die Ziffer, die nur einmal vorkommt, zu platzieren. Damit ist die Zahl eindeutig bestimmt.
Insgesamt gibt es folglich $9 \cdot \binom{9}{2} \cdot (3! + 2 \cdot 3) = 9 \cdot \binom{9}{2} \cdot 2 \cdot 3! = \underline{3888}$ Möglichkeiten.
Zu dieser Aufgabe gibt es verschiedene Lösungswege. Die Kunst besteht darin, sich nicht in unzählige Fallunterscheidungen zu verstricken.

c) Wir haben bei der Teilaufgabe a) gesehen, dass es 4536 vierstellige Zahlen mit vier unterschiedlichen Ziffern gibt. Dies können wir nun verwenden, denn eine vierstellige Zahl hat entweder vier unterschiedliche oder mindestens zwei gleiche Ziffern. Somit ist die gesuchte Anzahl $9 \cdot 10^3 - 4536 = \underline{4464}$.
Merkt euch diese Idee: Wenn ihr die Anzahl Objekte mit einer gewissen Eigenschaft nicht einfach 'zählen' könnt, dann versucht die Anzahl Objekte, die die Eigenschaft nicht erfüllen, zu zählen und diese Zahl von der Gesamtanzahl Objekte (die meist einfach zu 'zählen' ist) abzuziehen.

2. Dies ist eine direkte Anwendung der vierten kombinatorischen Formel. In Kugeln ausgedrückt: Ziehen mit Zurücklegen, wobei die Reihenfolge keine Rolle spielt. Die Lösung ist $\binom{12+3-1}{2} = \underline{91}$.

3. a) Man füllt zuerst das erste, dann das zweite Boot und die restlichen Leute werden ins letzte Boot gesetzt. Je nachdem, in welcher Reihenfolge man die Boote füllt, erhält man unterschiedliche Ausdrücke, die jedoch alle gleich $\binom{12}{5} \cdot \binom{12-5}{4} = \underline{27720}$ sind.

b) Man unterteilt in drei Fälle, je nachdem in welches Boot das Ehepaar steigt: Somit ergibt sich

$$\binom{10}{3} \cdot \binom{7}{4} + \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{2} + \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{4} = \underline{7980}.$$

4. Es gibt pro Farbe 2 Fünfblätter, die entweder Ass oder 6 enthalten, also insgesamt 8 (da es vier Farben gibt). Ausserdem gibt es pro Farbe 3 Fünfblätter, die keine der beiden Karten beinhalten, insgesamt 12. 9 Karten können nur ein Fünfblatt enthalten. Ist dieses Fünfblatt von der ersten Sorte, so gibt es nur eine Karte, die nicht unter den restlichen vier sein darf, nämlich diejenige Karte, die aus dem Fünf- ein Sechsblatt machen würde. Bei der anderen Sorte gibt es deren 2. Folglich gibt es insgesamt $12 \cdot \binom{29}{4} + 8 \cdot \binom{30}{4} = \underline{504252}$ Blätter mit Fünfblatt. (Die Wahrscheinlichkeit eines solchen Blattes ist $504252 : \binom{36}{9} = 0.54\%$.)

5. Wir stellen uns vor, die Studenten stünden in einer Reihe bevor sie sich setzen. Zwischen den sechs Studenten hat es genau fünf Zwischenräume. Die drei Professoren können nun diese Zwischenräume auf $5 \cdot 4 \cdot 3 = \underline{60}$ Varianten besetzen. Bei keiner der auf diese Weise entstandenen Anordnungen sitzen die Professoren gleich und die gestellte Bedingung ist erfüllt. Somit ist 60 das gesuchte Resultat.

6. In einem ersten Schritt kümmern wir uns nicht um die Voraussetzung, dass bei jedem Bein zuerst die Socke angezogen werden muss. Es gibt folglich 16! mögliche Reihenfolgen für die 16 unterscheidbaren Handlungen (Anziehen von Socke oder Schuh). Davon ist aber nur ein Teil zulässig, nämlich all diejenigen Reihenfolgen, bei denen bei jedem Bein zuerst die Socke angezogen wurde. Wir müssen daher für jedes Bein durch einen Faktor 2 dividieren. Das Endresultat ist somit $\frac{16!}{2^8}$.

7. Wir wählen zuerst die ersten drei Ziffern und nennen diese 'Vorwahl'. Dazu haben wir $10^3 = 1000$ Möglichkeiten. Diese drei Ziffern wiederholen sich nun entweder bei der vierten oder bei der fünften Ziffer beginnend. In beiden Fällen kann eine Ziffer beliebig gewählt werden. Somit hat man pro Vorwahl $2 \cdot 10 = 20$ einfach zu merkende Nummern und insgesamt $1000 \cdot 20 = 20000$. Nun aber aufgepasst! Es gibt Nummern, die wir zweimal gezählt haben und zwar diejenigen, bei denen sich die Vorwahl sowohl bei der vierten als auch bei der fünften Ziffer beginnend wiederholt. Von diesen Nummern gibt es sehr wenige, nämlich nur deren 10. Es sind dies die Nummern mit 7 gleichen Ziffern. Also ist die gesuchte Anzahl $20000 - 10 = \underline{19990}$.

8. Es gibt $\binom{49}{2} = 1176$ Möglichkeiten, zwei Felder grün zu färben. Eine Färbung, bei der die grünen Felder nicht symmetrisch bezüglich des Zentrums sind, ergibt durch Rotation drei neue Färbungen (die jedoch gemäss Aufgabenstellung identisch sind) und daher werden diese Färbungen vier Mal gezählt. Die Färbungen mit symmetrischen grünen Feldern werden nur zweimal gezählt, da eine solche Färbung bei Rotation um 180° in sich selbst übergeht. Die Anzahl symmetrischer Färbungen ist $\frac{49-1}{2} = 24$.
(Ausser zum Feld in der Mitte gibt es zu jedem Feld eine eindeutige symmetrische Färbung, bei der dieses Feld grün ist. Da eine solche symmetrische Färbung aus zwei grünen Feldern besteht, wird sie zweimal gezählt, daher die Division durch 2.)

Das Resulat ist folglich $\frac{1176-24}{4} + \frac{24}{2} = \underline{300}$.