

Kombinatorik Aufgaben

1. n Personen sitzen an einem runden Tisch. Zwei Sitzordnungen werden als gleich betrachtet, wenn jede Person die gleichen zwei Nachbarn hat. Wieviele verschiedene Sitzordnungen gibt es?
2. Wieviele ganzzahlige Lösungen hat die Gleichung $x + y + z + w = 100$, wenn $x, y, z, w \geq 8$ gelten soll?
3. An einem Tennisturnier nehmen n Spieler teil, es wird im K.O.-System gespielt. Wieviele Partien sind notwendig um den Sieger des Turniers zu erküren?
4. In wieviele Gebiete zerlegen n Geraden die Ebene, wenn keine zwei Geraden parallel sind und keine drei durch einen Punkt gehen?
5. Wie viele positive ganze Zahlen nicht grösser als 2008 sind durch 3 oder 4 teilbar aber nicht durch 5?
6. Auf wieviele Arten kann man aus einer Menge mit n Elementen zwei disjunkte Teilmengen auswählen, wobei es nicht auf die Reihenfolge ankommen soll? (Beachte: die leere Menge ist auch eine Teilmenge.)
7. Ein Lottotipp besteht aus einer 6-elementigen Teilmenge von $\{1, 2, \dots, 45\}$. Wieviele Tipps gibt es und wieviele davon enthalten zwei aufeinanderfolgende Zahlen?
8. Am Ende eines Bowlingturniers spielen die besten fünf Spieler ein Playoff. Zuerst spielt der 5. gegen den 4., wobei der Verlierer den 5. Preis gewinnt. Der Gewinner bowlt nun gegen den Dritten. Der Verlierer dieser Partie erhält den 4. Preis, der Gewinner spielt gegen den Zweiten. Hier erhält wiederum der Verlierer den 3. Preis und der Gewinner spielt gegen den Ersten um den Turniersieg. Auf wie viele Arten können die ersten fünf Preise verteilt werden?
9. (CH 02) In einer Gruppe von n Leuten veranstaltet jedes Wochenende jemand eine Party, an der er alle seine Bekannten einander gegenseitig vorstellt. Nachdem jeder der n Leute einmal eine Party gemacht hat, gibt es immer noch zwei Personen unter ihnen, die sich nicht kennen.
Zeige, dass diese zwei sich auch in Zukunft nie an einer dieser Partys kennen lernen werden.
(Zwei Leute kennen sich immer gegenseitig oder gegenseitig nicht)

10. (CH 02) Betrachte ein quadratisches Feld, das durch horizontale und vertikale Linien in 7×7 Einheitsquadrate unterteilt ist. In dieses Feld wollen wir Kacheln der Form eines Schweizerkreuzes (bestehend aus einem zentralen Quadrat und den vier unmittelbar angrenzenden Quadraten oben, unten, links und rechts) hineinlegen. Dabei sollen die Kanten der Kreuze auf den Linien des Feldes zu liegen kommen. Bestimme die kleinstmögliche Anzahl Quadrate, die auf dem Feld markiert werden müssen, damit jedes Kreuz, egal wo es auf das Feld gelegt wird, mindestens ein markiertes Quadrat bedeckt.
11. (CH 03) Betrachte eine Tabelle mit m Zeilen und n Spalten. Auf wieviele Arten kann diese Tabelle mit lauter Nullen und Einsen ausgefüllt werden, sodass in jeder Zeile und jeder Spalte eine gerade Anzahl Einsen stehen?
12. (CH 04) $m \times n$ Punkte sind in einem quadratischen Gitter zu einem Rechteck angeordnet. Wieviele Möglichkeiten gibt es, diese Punkte rot oder weiss zu färben, sodass unter je vier Punkten, die Ecken eines Einheitsquadrates bilden, genau zwei weisse und zwei rote vorkommen?
13. (CH 05) Sei M eine Menge mit n Elementen. Bestimme die Anzahl Möglichkeiten, drei Teilmengen A, B, C von M auszuwählen, sodass gilt

$$A \cap B \neq \emptyset, \quad B \cap C \neq \emptyset, \quad C \cap A \neq \emptyset,$$

$$A \cap B \cap C = \emptyset.$$

14. (CH 06) Sei n eine natürliche Zahl. Bestimme die Anzahl Teilmengen $A \subset \{1, 2, \dots, 2n\}$, sodass für keine zwei Elemente $x, y \in A$ gilt $x + y = 2n + 1$.
15. (CH 07) Wie viele siebenstellige Zahlen gibt es, für die das Produkt der Ziffern gleich 45^3 ist?
16. (CH 08) Ein *Weg* in der Ebene führt vom Punkt $(0, 0)$ zum Punkt $(6, 6)$, wobei man in jedem Schritt entweder um 1 nach rechts oder um 1 nach oben gehen kann. Wieviele Wege gibt es, die weder den Punkt $(2, 2)$ noch den Punkt $(4, 4)$ enthalten?
17. (CH 08) Ein quadratisches Spielbrett besteht aus $2n \times 2n$ Feldern. Es sollen n dieser Felder markiert werden, sodass keine zwei markierten Felder in derselben oder benachbarten Zeilen liegen, und sodass auch keine zwei markierten Felder in derselben oder benachbarten Spalten liegen. Auf wieviele Arten ist dies möglich?
18. n Kinder sitzen in einem Kreis. Nun werden die Plätze getauscht, sodass jedes Kind neu auf seinem alten Platz oder einen Platz links oder rechts davon sitzt. auf wieviele Arten kann dies geschehen?

19. An einem Ball sind n Frauen und $2n - 1$ Männer. Die k -te Frau kennt die Männer $1, 2, \dots, 2k - 1$ und keine anderen. Auf wieviele Arten können r Frauen mit r Männern tanzen, sodass alle Frauen ihre Tanzpartner kennen?

20. (APMO) Enthält $\{1, 2, \dots, 3000\}$ eine Teilmenge A mit $|A| = 2000$ und der Eigenschaft
 $x \in A \Rightarrow 2x \notin A$?

21. (USA) Eine binäre Folge ist eine Folge, die nur aus Nullen und Einsen besteht. Sei a_n die Anzahl binärer Folgen der Länge n , die die Teilfolge 101 nicht enthalten. Sei b_n die Anzahl binärer Folgen der Länge n , die keine der Teilfolgen 1001 oder 0110 enthalten. Zeige, dass gilt

$$b_n = 2a_{n-1}.$$

22. (CSO) In einer Sprache gibt es n Buchstaben. Eine Folge von Buchstaben ist genau dann ein Wort, wenn zwischen zwei gleichen Buchstaben nie zwei gleiche Buchstaben stehen.

(a) Was ist die grösstmögliche Länge eines Wortes?

(b) Wieviele Wörter maximaler Länge gibt es?

23. (IMO 89) Eine Permutation $(x_1, x_2, \dots, x_{2n})$ der Zahlen $1, 2, \dots, 2n$ heisst *angenehm*, wenn es ein i , $1 \leq i \leq 2n - 1$, gibt mit $|x_i - x_{i+1}| = n$. Zeige, dass mindestens die Hälfte aller Permutationen angenehm ist.