

# Kombinatorik

Thomas Huber

23. Oktober 2005

## Inhaltsverzeichnis

1	Divide and Conquer	2
2	Bijektionen	6
3	Rekursionen	7
4	Gruppieren	9

# 1 Divide and Conquer

Eine wichtige Aufgabe der Kombinatorik ist das Zählen. Typische Fragestellungen in diesem Zusammenhang sind etwa:

*Wieviele Möglichkeiten gibt es, in einer Firma mit 100 Beschäftigten ein Team aus 10 Leuten zusammenzustellen und eine dieser Personen zum Teamchef zu ernennen?*

Dieses Kapitel wird sich mit diversen Methoden beschäftigen, die es erlauben, Fragen wie diese zu beantworten.

Das wichtigste Prinzip in der Kombinatorik lautet **Divide and Conquer**. Das heisst, teile ein Problem in mehrere kleine Probleme auf, löse diese und verbinde die Lösungen zu einer Lösung des ursprünglichen Problems. Bei genauer Betrachtung stellt man fest, dass sich das meiste, was wir hier machen werden (und nicht nur das), diesem allgemeinen Prinzip unterordnet. Beginnen wir also.

Wenn man etwas zählt, dann bestimmt man immer die Grösse einer Menge, nämlich der Menge der Dinge, die man zählen möchte. Ist  $A$  eine endliche Menge, dann bezeichnet  $|A|$  die *Anzahl* Elemente von  $A$ . Zwei Mengen, die kein Element gemeinsam haben, nennt man *disjunkt*.

**Summenregel:** Ist  $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  eine *disjunkte* Zerlegung der Menge  $A$ , dann gilt

$$|A| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|.$$

Die Summenregel ist eine der vielen Erscheinungsformen von Divide and Conquer: Wenn man die Elemente von  $A$  nicht direkt zählen kann, dann unterteilt man sie in Gruppen, deren Grösse einfacher zu bestimmen ist, und addiert die Ergebnisse. Die Summenregel ist eine Grunderfahrung jedes Menschen und wir verwenden sie unbewusst natürlich dauernd. Zum Beispiel ist die Gesamtzahl Menschen auf der Welt = Anzahl Männer + Anzahl Frauen, logisch. Wir werden später interessantere Anwendungen sehen.

**Produktregel:** Besteht ein Auswahlprozess aus  $r$  Teilprozessen, die *unabhängig* voneinander sind, sodass man im  $k$ -ten Prozess genau  $n_k$  Wahlmöglichkeiten hat, dann ist die Gesamtzahl der Wahlmöglichkeiten gleich

$$n_1 \cdot n_2 \cdots n_r.$$

Wie die Summenregel verwenden wir auch die Produktregel meist unbewusst. Wir geben ein Beispiel:

## Beispiel 1.

- Wieviele natürliche Zahlen gibt es, die im Dezimalsystem geschrieben genau  $n$  Stellen besitzen?*
- Eine  $n$ -elementige Menge besitzt  $2^n$  Teilmengen.*
- Die natürliche Zahl  $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}$  wobei die  $p_i$  verschiedene Primzahlen sind, besitzt genau  $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_r + 1)$  verschiedene positive Teiler.*

*Lösung.* (a) Die erste Ziffer darf keine 0 sein, sonst ist die Zahl nicht  $n$ -stellig. Also gibt es 9 Möglichkeiten, die erste Ziffer zu wählen. Für jede weitere Ziffer gibt es 10 Möglichkeiten. Da wir die Ziffern völlig unabhängig voneinander wählen dürfen, gibt es nach der Produktregel also  $9 \cdot 10 \cdots 10 = 9 \cdot 10^{n-1}$  solche Zahlen.

(b) Man kann für jedes Element einzeln und unabhängig entscheiden, ob es zur Teilmenge gehört oder nicht. Also gibt es  $2^n$  Wahlmöglichkeiten. (Beachte: die leere Menge ist auch eine Teilmenge)

(c) Ein Teiler ist dadurch bestimmt, dass man die Exponenten  $b_k$  angibt, mit denen die Primzahlen  $p_k$  in seiner Primfaktorzerlegung vorkommen. Dabei ist  $0 \leq b_k \leq a_k$ , folglich gibt es  $a_k + 1$  Möglichkeiten,  $b_k$  zu wählen. (Beachte: 1 ist auch ein Teiler)

□

Wir besprechen als Nächstes eine Verallgemeinerung der Summenregel, allerdings nur in zwei Spezialfällen. Der wesentliche Punkt der Summenregel ist, dass man eine Menge  $A$  in *disjunkte* Mengen  $A_i$  zerlegt. Oft hat man jedoch solche Zerlegungen, die nicht disjunkt sind. Hier hilft die sogenannte

**Ein-/Ausschalt-Formel:** Es gilt

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

und

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

Zur Begründung dieser Formeln: in der Ersten steht links die Anzahl Elemente, welche in  $A$  oder in  $B$  (oder in beiden) enthalten sind. Diese Anzahl erhält man aber auch, indem man die Elemente von  $A$  und  $B$  zusammenzählt und dann diejenigen wieder abzieht, welche in beiden Mengen enthalten sind (denn diese wurden ja doppelt gezählt). In der zweiten Formel erhält man die Anzahl Elemente von  $A \cup B \cup C$  analog, indem man alle Elemente zusammenzählt, dann diejenigen wieder abzieht, welche in zwei der Mengen enthalten sind, und schliesslich diejenigen wieder dazuzählt, welche sogar in allen dreien enthalten sind (denn insgesamt wurden diese Elemente dreimal gezählt, dann wieder dreimal abgezogen, folglich muss man sie wieder einmal dazunehmen).

Der Nutzen der Ein-/Ausschalt-Formel liegt nun darin, dass es oft viel einfacher ist, Dinge zu zählen, die in mehreren Mengen gleichzeitig liegen, als Dinge zu zählen, die in mindestens einer von mehreren Mengen liegen. Hier ist ein typisches Beispiel:

**Beispiel 2.** *Wieviele Möglichkeiten gibt es,  $n \geq 3$  Bonbons auf drei Kinder zu verteilen, sodass keines der Kinder leer ausgeht (die Bonbons werden dabei als verschieden betrachtet)?*

*Lösung.* Es gibt nach der Produktregel  $3^n$  Möglichkeiten, die Bonbons zu verteilen, wenn keine zusätzlichen Bedingungen bestehen. Davon müssen wir nun die Anzahl Verteilungen abziehen, in denen *mindestens* ein Kind leer ausgeht. Diese Anzahl werden wir mit der Ein-/Ausschalt-Formel berechnen. Seien  $A$ ,  $B$  bzw.  $C$  die Mengen der Verteilungen, in denen das erste, das zweite bzw. das dritte Kind leer ausgeht. Wir wollen also  $|A \cup B \cup C|$  berechnen. Wiederum nach der Produktregel ist  $|A| = 2^n$  und aus Symmetriegründen auch  $|B| = |C| = 2^n$ . Ausserdem gilt  $|A \cap B| = 1$ , denn es gibt nur eine Verteilung, in der die ersten beiden Kinder leer ausgehen: das dritte erhält alle Bonbons. Analog gilt  $|B \cap C| = |C \cap A| = 1$ . Schliesslich ist  $|A \cap B \cap C| = 0$ , denn mindestens eines der Kinder kriegt natürlich ein Bonbon. Daraus folgt

$$|A \cup B \cup C| = 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 1 + 0,$$

und die gesuchte Anzahl Verteilungen ist somit gleich  $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$ .

□

Wir wenden uns jetzt den vier fundamentalen Auswahlprozessen zu und berechnen jeweils die Anzahl Möglichkeiten eine Auswahl zu treffen. Man kann sie beschreiben als **Ziehen von  $k$  Kugeln aus einer Urne mit  $n$  Kugeln**. Genauer gesagt enthält die Urne  $n$  unterscheidbare Kugeln, man kann sie sich zum Beispiel von 1 bis  $n$  nummeriert vorstellen. Dabei kommt es natürlich darauf an, ob man die Kugeln nach dem Ziehen wieder in die Urne zurücklegt oder nicht. Ausserdem kann man die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, als wichtig betrachten oder nicht. Dies ist von der Anwendung abhängig. Wir diskutieren im Folgenden diese vier Fälle.

### 1. Ohne Zurücklegen, Reihenfolge wichtig.

Wir berechnen also die Anzahl Möglichkeiten,  $k$  Kugeln aus einer Urne mit  $n$  Kugeln zu ziehen, ohne die Kugeln nach der Ziehung wieder zurückzulegen. Dabei soll die Reihenfolge der gezogenen Kugeln entscheidend sein. Beispiele:

- Anzahl Möglichkeiten,  $k$  Personen aus  $n$  Leuten auszuwählen und von links nach rechts in eine Reihe zu stellen.
- Anzahl möglicher Einläufe der ersten  $k$  Pferde in einem Pferderennen mit  $n$  Pferden, wenn keine zwei Pferde gleichzeitig einlaufen.
- Anzahl Wörter der Länge  $k$  aus einem Alphabet mit  $n$  Buchstaben, in dem kein Buchstaben doppelt auftritt.

Für die erste gezogene Kugel gibt es  $n$  Möglichkeiten, für die zweite dann noch  $(n - 1)$  Möglichkeiten, da die erste Kugel fehlt. Für die dritte Kugel sind es noch  $(n - 2)$  Möglichkeiten etc. Also ist die gesuchte Zahl gleich

$$n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

Dabei ist  $n! = n(n - 1) \cdots 2 \cdot 1$  eine abgekürzte Schreibweise, man nennt sie *n Fakultät*. Wichtig ist speziell der Fall  $n = k$ . Eine Umordnung von Dingen nennt man auch eine *Permutation*. Es gibt also genau  $n!$  Permutationen einer  $n$ -elementigen Menge.

### 2. Ohne Zurücklegen, Reihenfolge unwichtig.

Beispiele:

- Anzahl Möglichkeiten, aus  $n$  Leuten ein  $k$ -köpfiges Team auszuwählen.
- Anzahl  $k$ -elementiger Teilmengen einer  $n$ -elementigen Menge.
- Anzahl möglicher Ziehungen von  $k$  Zahlen aus  $\{1, 2, \dots, n\}$  im Lotto.

Man bezeichnet diese Zahl mit  $\binom{n}{k}$  (sprich: *n tief k*) und nennt sie ein *Binomialkoeffizient*. Wie gross ist sie? Wir können die  $k$  Kugeln erstmal mit Beachtung der Reihenfolge ziehen, dafür gibt es  $n!/(n - k)!$  Möglichkeiten. Nun gibt es aber genau  $k!$  Möglichkeiten, die  $k$  gezogenen Kugeln umzuordnen. Zwei Ziehungen, die sich nur durch die Reihenfolge der Kugeln unterscheiden, wollen wir ja aber als gleich betrachten, folglich haben wir jede mögliche Ziehung  $k!$  mal zuviel gezählt. Dies ergibt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

### 3. Mit Zurücklegen, Reihenfolge wichtig.

Beispiel:

- Anzahl Wörter der Länge  $k$  aus einem Alphabet mit  $n$  Buchstaben

Es gibt für jede der  $k$  Kugeln genau  $n$  Möglichkeiten, da die Kugeln zurückgelegt werden. Mit der Produktregel ergibt sich die gesuchte Zahl zu

$$n \cdot n \cdots n = n^k.$$

#### 4. Mit Zurücklegen, Reihenfolge unwichtig.

Beispiel:

- Anzahl Möglichkeiten, eine Fruchtschale mit  $k$  Früchten zusammenzustellen, wobei  $n$  verschiedene Fruchtsorten zur Verfügung stehen.

Zwei Ziehungen sind also identisch, falls gleichviele Kugeln mit der gleichen Nummer gezogen wurden (wir haben uns die Kugeln ja von 1 bis  $n$  nummeriert gedacht). Eine solche Ziehung ist also dadurch eindeutig bestimmt, dass wir angeben, wie oft welche Nummer gezogen wurde. Wir ordnen die  $k$  gezogenen Kugeln in einer Reihe an. Zuerst alle mit der Nummer 1, dann alle mit der Nummer 2 etc. Dann setzen wir Striche eventuell vor die erste Kugel, zwischen zwei benachbarte Kugeln und vielleicht hinter die letzte Kugel und zwar so, dass ein Strich einer Erhöhung der Nummer um 1 entspricht. Es können also auch mehrere Striche direkt hintereinander stehen. Zum Beispiel sei  $k = 6$ ,  $n = 7$ . Das Bild

$$| \text{OOO} || \text{O} | \text{OO} ||$$

bedeutet dann, dass die ersten drei Kugeln die Nummer 2 haben, die nächste die Nummer 4 und die letzten beiden die Nummer 5. Wir schreiben dabei für jede Erhöhung der Nummer um 1 einen Strich, auch hinter der letzten Kugel, falls nötig. Insgesamt stehen dann  $n - 1$  Striche da. Man kann es auch so verstehen: Die Striche trennen die Kugelgruppen mit gleicher Nummer voneinander. Stehen mehrere Striche nebeneinander oder steht ein Strich vor der ersten oder hinter der letzten Kugel, dann kommen gewisse Nummern nicht vor, die entsprechenden Gruppen sind leer.

Offenbar kann man die Ziehung aus der Abfolge von Kugeln und Strichen rekonstruieren, es gehört nämlich zu jeder Ziehung genau eine solche Abfolge von Strichen und Kugeln. Um eine solche Abfolge festzulegen, genügt es, aus den  $k + (n - 1)$  Plätzen diejenigen auszuwählen, wo ein Strich (oder was auf dasselbe hinausläuft: eine Kugel) stehen soll. Es gibt  $n - 1$  Striche beziehungsweise  $k$  Kugeln, folglich ist die gesuchte Zahl gleich

$$\binom{n + k - 1}{n - 1} = \binom{n + k - 1}{k}.$$

Diese vier Grundtypen treten natürlich selten in Reinform auf. Es ist die geschickte Kombination dieser und anderer Zählmethoden, die schliesslich zum Erfolg führen. Um ein konkretes Problem zu lösen, führt man oft bewusst oder unbewusst eine Nummerierung der Dinge ein, um sie besser zählen zu können. Es ist jedoch wichtig, am Schluss wieder durch den geeigneten Faktor zu dividieren, um ungewünschte Nummerierungen wieder zu entfernen (wegen der Nummerierung hat man alles mehrfach gezählt). Am Anfang macht man hier oft Fehler, da hilft nur Übung.

**Beispiel 3.** *Es treten  $2n$  Tennisspieler zu einem Turnier an. In der ersten Runde spielen alle Teilnehmer genau einmal und alle Spiele sind Eins gegen Eins. Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Spieler für die  $n$  Spiele der ersten Runde einzuteilen?*

*Lösung.* Wir geben zur Übung gleich zwei Lösungen. Sei  $A_n$  die gesuchte Zahl.

### 1. Lösung

Stelle die  $2n$  Spieler in einer Reihe auf, dafür gibt es  $(2n)!$  Möglichkeiten. Bilde dann Paare  $(1, 2), (3, 4), \dots, (2n-1, 2n)$ , dies geht auf eine Art. Nun kommt es ja aber nur darauf an, wer gegen wen spielt, und nicht, wer wo steht. Es gibt  $2^n$  Möglichkeiten, die Spieler mit ihrem Gegner zu permutieren und  $n!$  Möglichkeiten, die Paare zu permutieren. Wir müssen also noch durch  $2^n n!$  teilen, um die Mehrfachzählung zu eliminieren.

$$A_n = \frac{(2n)!}{2^n n!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1).$$

### 2. Lösung

Wir können das erste Pärchen auf  $\binom{2n}{2}$  Arten wählen. Für das zweite Pärchen gibt es dann noch  $\binom{2n-2}{2}$  Möglichkeiten und für das  $k$ -te  $\binom{2n-2(k-1)}{2}$ . Jetzt haben wir aber die  $n$  Pärchen nummeriert, daher müssen wir noch durch  $n!$  teilen. Also

$$A_n = \frac{1}{n!} \binom{2n}{2} \binom{2n-2}{2} \cdots \binom{2}{2} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1).$$

□

**Beispiel 4.** *Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Seitenflächen eines Würfels mit 6 verschiedenen Farben zu bemalen? Dabei gelten zwei Färbungen als gleich, wenn sie sich nur um eine Drehung des Würfels unterscheiden.*

*Lösung.* Es gibt  $6!$  Möglichkeiten, den Würfel zu bemalen, wenn man ihn festhält. Ausserdem kann man ihn auf 24 Arten drehen. Dies sieht man wie folgt: Stelle den Würfel auf einen Tisch mit einer Seitenfläche nach vorn. Es gibt 6 Möglichkeiten für die Fläche, auf der der Würfel steht, und weitere 4 Möglichkeiten, die vordere Fläche zu wählen. Folglich gibt es  $6!/24 = 30$  verschiedene Färbungen.

□

Im folgenden werden wir drei sehr wichtige kombinatorische Techniken diskutieren, die überall Verwendung finden. Sie kommen stets dann zum Zug, wenn man die Grösse einer Menge mit den bisherigen Mitteln nicht bestimmen kann.

## 2 Bijektionen

Eine Abbildung  $f : A \rightarrow B$  zwischen zwei Mengen  $A$  und  $B$  nennt man *injektiv*, falls aus  $f(x) = f(y)$  folgt, dass  $x = y$  gilt. Anders gesagt, jedes Element aus  $B$  besitzt höchstens ein Urbild in  $A$ . Die Funktion  $f$  heisst *surjektiv*, falls es zu jedem  $y \in B$  ein  $x \in A$  gibt mit  $f(x) = y$ , das heisst, jedes Element in  $B$  besitzt mindestens ein Urbild in  $A$ . Ist  $f$  injektiv und surjektiv, dann heisst  $f$  *bijektiv* oder *1:1-Funktion* oder *Bijektion*. Der Name kommt daher, dass eine bijektive Funktion eine 1:1-Beziehung zwischen den Elementen in  $A$  und den Elementen in  $B$  herstellt, denn jedes Element in  $B$  besitzt genau ein Urbild.

Existiert eine surjektive, injektive beziehungsweise bijektive Funktion  $f : A \rightarrow B$  zwischen den endlichen Mengen  $A$  und  $B$ , dann gilt automatisch  $|A| \geq |B|$ ,  $|A| \leq |B|$  beziehungsweise  $|A| = |B|$ . Dabei ist der bijektive Fall der wichtigste. Hat man eine Menge  $A$ , deren Grösse man nicht bestimmen kann, dann kann man versuchen, eine Bijektion in eine andere Menge zu finden, deren Elemente einfacher zu zählen sind.

Genau das haben wir oben beim Urnenproblem im 4. Fall gemacht. Wir haben die Menge der möglichen Ziehungen bijektiv abgebildet auf die Menge aller Kugel-Strich-Folgen mit  $k$

Kugeln und  $n - 1$  Strichen. Diese Folgen sind viel einfacher zu zählen als die ursprünglichen Ziehungen. Es folgen nun einige weitere Beispiele.

**Beispiel 5.** *Betrachte ein konvexes  $n$ -Eck, in dem sich keine drei Diagonalen in einem inneren Punkt (einem Punkt, der nicht zum Rand gehört) schneiden. Bestimme die Anzahl innerer Punkte des  $n$ -Ecks, welche Schnittpunkte zweier Diagonalen sind.*

*Lösung.* Jeder solche Schnittpunkt liegt auf genau zwei Diagonalen, da nicht drei Diagonalen durch denselben Punkt gehen. Betrachte die 4 Eckpunkte des  $n$ -Ecks, in denen die zwei Diagonalen enden. Aus diesen 4 Eckpunkten lässt sich der Schnittpunkt rekonstruieren. Denn es gibt nur genau eine Möglichkeit, zwei Diagonalen zu wählen, die sich im Innern des  $n$ -Ecks schneiden und deren Endpunkte genau diese 4 Ecken sind, wie man sich leicht überlegt. Diese Konstruktion ist daher eine Bijektion der Menge aller Inneren Diagonalschnittpunkten auf die Menge aller 4-elementigen Teilmengen der Eckpunkte. Es gibt nun genau  $\binom{n}{4}$  Möglichkeiten, 4 Eckpunkte zu wählen, also gibt es genausoviele Schnittpunkte.  $\square$

**Beispiel 6.** *Sei  $M = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ . Ein Paar  $(a, b)$  von zwei Zahlen aus  $M$  heisst gut, falls gilt  $n \mid a + 2b$ . Zeige, dass es gleichviele gute Paare  $(a, b)$  mit  $a > b$  gibt, wie gute Paare mit  $b > a$ .*

*Lösung.* Man könnte versuchen, die Anzahl guter Paare mit  $a > b$  und  $b > a$  zu zählen und die Aufgabe so zu lösen. Aber wieso auch, die genaue Zahl wird ja gar nicht verlangt. Mit einer Bijektion gehts viel schneller. Die zentrale Beobachtung dabei:  $(a, b)$  ist genau dann ein gutes Paar, wenn  $(n - a, n - b)$  eines ist. Dies folgt unmittelbar aus der Gleichung  $(a + 2b) + ((n - a) + 2(n - b)) = 3n$ . Ausserdem gilt  $a > b \Leftrightarrow n - a < n - b$ . Daher ist die Abbildung  $(a, b) \mapsto (n - a, n - b)$  eine Bijektion von der Menge der guten Paare mit  $a > b$  in die Menge derjenigen mit  $b > a$ .  $\square$

**Beispiel 7.** *Wieviele binäre Folgen der Länge  $n$  gibt es, die genau  $m$  01-Blöcke enthalten? (Eine binäre Folge besteht nur aus Nullen und Einsen).*

*Lösung.* Die Anzahl 0 – 1 Wechsel in der Folge soll nach Voraussetzung genau  $m$  sein. Wie steht es mit der Anzahl 1 – 0 Wechsel? Offenbar gibt es zwischen zwei 0 – 1 Wechseln immer genau ein 1 – 0 Wechsel, ob es am Anfang und Ende der Folge aber solche gibt, hängt von der Folge ab. Dies können wir aber stets erzwingen, indem wir an den Anfang der Folge eine 1 und ans Ende eine 0 anhängen. Die neue Folge der Länge  $n + 2$  hat dann genau  $m + 1$  solche 1 – 0 Wechsel. Offenbar ist diese neue Folge durch die Positionen der  $2m + 1$  Wechsel von 0 zu 1 oder von 1 zu 0 bereits eindeutig bestimmt. Diese ereignen sich stets zwischen aufeinanderliegenden Folgegliedern, also in den  $n + 1$  Zwischenräumen. Es gibt genau  $\binom{n+1}{2m+1}$  Möglichkeiten, diese Positionen auszuwählen. Dies ist gleichzeitig die Lösung der Aufgabe. (Frage: wo steckt in dieser Argumentation jetzt die Bijektion?)  $\square$

### 3 Rekursionen

Rekursion ist eine weitere Erscheinungsform von Divide and Conquer. Die Idee dahinter ist, ein Problem solange durch eine verkleinerte Kopie zu ersetzen bis es trivial (oder zumindest lösbar) wird. Wesentlich ist dabei, wie man aus den Informationen über die kleineren Kopien die gesamte Information über das ursprüngliche Problem zurückgewinnt. Dies geschieht über eine *Rekursionsgleichung*. Wir erläutern das Prinzip an einem Beispiel.

**Beispiel 8.** *Wieviele Teilmengen von  $\{1, 2, \dots, 15\}$  enthalten keine zwei aufeinanderfolgende Zahlen?*

*Lösung.* Zuerst verallgemeinern wir das Problem, indem wir 15 durch eine beliebige natürliche Zahl  $n$  ersetzen. Sei  $a_n$  die Anzahl solcher Teilmengen. Anstatt  $a_n$  direkt zu berechnen, versuchen wir, sie durch  $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots$  auszudrücken. Dazu betrachten wir zwei Fälle (wieder Divide and Conquer!), ausserdem sei  $n \geq 3$ . Enthält so eine Teilmenge die Zahl  $n$ , dann darf sie  $n-1$  nicht enthalten. Es gibt nun aber keine weiteren Restriktionen an die übrigen Elemente, ausser dass keine zwei davon aufeinanderfolgende Zahlen sind. Folglich gibt es genau  $a_{n-2}$  solche Teilmengen. Enthält die Teilmenge die Zahl  $n$  nicht, dann folgt analog zum gerade betrachteten Fall, dass es genau  $a_{n-1}$  solche Teilmengen gibt. Wir haben also die Rekursionsformel

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 3$$

bewiesen. Zusammen mit den beiden offensichtlichen Werten  $a_1 = 2, a_2 = 3$  erhalten wir damit der Reihe nach  $a_3 = 5, a_4 = 8, \dots, a_{15} = 1579$ . Die Folge  $a_n$  ist nichts anderes als die (etwas verschobene) FIBONACCI Folge. □

Die Schritte in der Lösung sind klassisch:

1. Verallgemeinere das Problem wenn nötig.
2. Führe geeignete Bezeichnungen ein.
3. Stelle eine oder mehrere Rekursionsgleichungen auf.
4. Versuche gegebenenfalls eine explizite Formel zu finden und mit Induktion zu beweisen.

Den letzten Schritt haben wir in obigem Beispiel nicht durchgeführt, da wir nur am konkreten Wert  $n = 15$  interessiert waren. Es ist natürlich bei weitem nicht immer möglich, eine sinnvolle explizite Formel aufzustellen. Und selbst wenn eine existiert, kann diese recht kompliziert sein. Die Fibonacci Folge zum Beispiel ist rekursiv definiert durch  $F_0 = 0, F_1 = 1$  und  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3$ . BIZET fand nun als Erster die Darstellung

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Wir werden später sehen, wie man solche expliziten Formeln bestimmen kann, wenn die Rekursionsgleichungen wie in diesem Fall linear sind.

**Beispiel 9.**  $n \geq 2$  Leute sitzen in einem Restaurant an einem runden Tisch. Es gibt drei Menus zur Wahl. Auf wieviele Arten können diese Leute ihr Essen bestellen, wenn keine zwei benachbarte Personen dasselbe Menu essen wollen?

*Lösung.* Sei  $a_n$  diese Anzahl. Es gilt  $a_2 = 6$  und  $a_3 = 6$ . Sei nun  $n \geq 4$ . Nummeriere die Leute im Uhrzeigersinn von 1 bis  $n$  und färbe sie rot, blau oder gelb, je nach gewähltem Menu. Wir nennen eine Färbung zulässig, wenn keine zwei benachbarten Personen gleich gefärbt sind. Wir unterscheiden wieder zwei Fälle.

Hat  $n-1$  dieselbe Farbe wie 1, dann gibt es  $a_{n-2}$  Möglichkeiten, die ersten  $n-1$  Leute zu färben. Denn Jede solche Färbung entspricht einer zulässigen Färbung von  $n-2$  Personen in einem Kreis (entferne  $n$  und  $n-1$  und schliesse den Kreis, Bijektion!). Ausserdem gibt es 2 Mögliche Färbungen von  $n$ , insgesamt also  $2a_{n-2}$  zulässige Färbungen.

Haben  $n-1$  und 1 unterschiedliche Farben, dann gibt es genau  $a_{n-1}$  Möglichkeiten, die

ersten  $n - 1$  Leute zu färben (entferne  $n$  und schliesse den Kreis, dies ergibt eine zulässige Färbung). Ausserdem ist die Farbe von  $n$  eindeutig bestimmt.

Wir haben also für  $n \geq 4$  die Rekursionsformel  $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ . Die folgende Tabelle enthält die ersten paar Werte von  $a_n$ :

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$a_n$	6	6	18	30	66	126	258	510	1026

Diese lässt vermuten, dass die explizite Formel  $a_n = 2^n + 2(-1)^n$  gilt. Sie ist richtig für  $n = 2, 3$  und gelte für  $n - 1$  und  $n - 2$ . Dann folgt

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2^{n-1} + 2(-1)^{n-1} + 2(2^{n-2} + 2(-1)^{n-2}) = 2^n + 2(-1)^n$$

Dies beendet den Beweis. □

Manchmal ist es nützlich, Hilfsgrössen zu definieren, an denen man eigentlich nicht direkt interessiert ist, mit deren Hilfe man aber Rekursionsformeln aufstellen kann.

**Beispiel 10.** *Wieviele Folgen der Länge  $n$  bestehend aus den Zahlen  $0, 1, 2$  gibt es, sodass zwei benachbarte Zahlen sich höchstens um 1 unterscheiden?*

*Lösung.* Sei  $x_n$  die Anzahl solcher Folgen, die mit 1 beginnen. Aus Symmetriegründen (Bijektion) gibt es gleichviele Folgen, die mit 0 beginnen, wie Folgen, die mit 2 beginnen. Sei  $y_n$  diese Anzahl. Für  $n \geq 2$  gelten nun die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + 2y_{n-1}, \\ y_n &= y_{n-1} + x_{n-1}. \end{aligned}$$

Interessiert sind wir am Wert von  $a_n = x_n + 2y_n$ . Aus der ersten Gleichung folgt  $2y_{n-1} = x_n - x_{n-1}$  und damit auch  $2y_n = x_{n+1} - x_n$ . Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt

$$x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}.$$

Andererseits folgt aus der zweiten Gleichung  $x_n - x_{n-1} = (y_{n+1} - y_n) - (y_n - y_{n-1}) = y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}$ . Einsetzen in die erste Gleichung ergibt  $2y_{n-1} = x_n - x_{n-1} = y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}$ , also

$$y_{n+1} = 2y_n + y_{n-1}.$$

Kombiniert man diese beiden Rekursionsgleichungen, erhält man schliesslich

$$a_{n+1} = x_{n+1} + 2y_{n+1} = 2(x_n + 2y_n) + (x_{n-1} + 2y_{n-1}) = 2a_n + a_{n-1}.$$

Zusammen mit den Werten  $a_1 = 3$  und  $a_2 = 7$  lassen sich daraus alle  $a_n$  rekursiv berechnen. □

## 4 Gruppieren

Manchmal kann man die Anzahl Objekte mit einer gewissen Eigenschaft berechnen oder zumindest abschätzen, indem man die Gesamtheit der Objekte in disjunkte Gruppen einteilt, und dann zeigt, dass pro Gruppe genau die Hälfte, oder mindestens drei etc. Objekte die gewünschte Eigenschaft haben (Summenformel). Wie diese Gruppen zu wählen sind, ist oft gar nicht klar, und tatsächlich lassen sich einige der schwierigsten Kombinatorikaufgaben mit dieser Technik lösen.

**Beispiel 11.** (USA 90) Ein bestimmter Staat vergibt sechsstellige Autonummern, mit Ziffern von 0 bis 9. Ausserdem sollen zwei verschiedene Autonummern an mindestens zwei Stellen unterschiedliche Ziffern aufweisen. Wievielen Autos kann dieser Staat ein Nummernschild ausstellen?

*Lösung.* Sei  $abcde$  eine beliebige Ziffernfolge mit  $a, b, c, d, e \in \{0, \dots, 9\}$ . Wir fassen alle Nummernschilder, welche mit der Folge  $abcde$  beginnen, zu einer Gruppe zusammen. Nach Voraussetzung kann höchstens ein Nummernschild aus jeder Gruppe verwendet werden, also insgesamt höchstens  $10^5$  Stück. Wir zeigen nun, dass diese Zahl wirklich erreichbar ist. Dazu wählen wir alle  $10^5$  Nummernschilder der Form  $abcdef$  mit  $f \equiv a + b + c + d + e \pmod{10}$ . Je zwei solche Schilder unterscheiden sich an mindestens zwei Stellen. Denn sie unterscheiden sich an mindestens einer der ersten fünf Stellen. Unterscheiden sie sich an genau einer dieser Stellen, dann müssen sie sich wegen den Kongruenzbedingungen auch an der sechsten Stelle unterscheiden, wie behauptet. □

Hier wurde eine Aufteilung in Gruppen dazu verwendet, die Anzahl zulässiger Nummern gegen oben abzuschätzen. Letztlich war das nur eine Umformulierung des Schubfachprinzips. Im nächsten, sehr schwierigen Beispiel ist die Aufteilung in Gruppen der zentrale Punkt. Was man da wie aufteilen muss, ist anfangs überhaupt nicht klar.

**Beispiel 12.** An einer geraden Strasse befinden sich  $n$  Parkplätze. Der Reihe nach fahren Autos mit Nummern  $1, 2, \dots, n$  der Strasse entlang. Der  $i$ -te Fahrer hat einen bevorzugten Parkplatz, welcher die Nummer  $a_i$  trägt. Ist dieser Parkplatz frei, parkt er dort, ansonsten fährt er weiter und parkiert auf dem nächsten freien Parkplatz. Sind alle nachfolgenden Parkplätze besetzt, fährt er davon. Wieviele Folgen  $a_1, \dots, a_n$  erlauben allen Fahrern auf einem der Parkplätze zu parken?

*Lösung.* Füge einen  $n + 1$ -ten Parkplatz ans Ende der Strasse, und schliesse diese zu einem Kreis, sodass also nach dem  $n + 1$ -ten Parkplatz wieder der erste kommt. Wir betrachten nun Folgen  $a_1, \dots, a_n \in \{1, \dots, n + 1\}$  bevorzugter Parkplätze (beachte:  $n + 1$ , nicht  $n$ !) Die Fahrer kommen nun nacheinander und fahren der geschlossenen Strasse entlang, beginnend beim ersten Parkplatz. Ist ihr bevorzugter Parkplatz besetzt, parken sie beim nächsten freien (den es immer gibt). Am Schluss bleibt genau ein Parkplatz unbesetzt, und eine Folge  $a_1, \dots, a_n$  erfüllt genau dann die Bedingungen des ursprünglichen Problems, wenn dies der  $n + 1$ -te Parkplatz ist (beachte, dass dann insbesondere automatisch  $a_i \leq n$  gilt für alle  $i$ , die Folge erfüllt also die ursprüngliche Bedingung). Wir fassen nun die insgesamt  $(n + 1)^n$  Folgen in Gruppen zu je  $n + 1$  zusammen. Und zwar sind zwei Folgen  $a_1, \dots, a_n$  und  $b_1, \dots, b_n$  genau dann in derselben Gruppe, wenn ein  $k$  existiert mit  $a_i \equiv b_i + k \pmod{n + 1}$  für alle  $i$ . Die beiden Folgen unterscheiden sich also um eine additive Konstante, und der freie Parkplatz am Schluss ist für jede Folge in einer festen Gruppe ein anderer. Dies bedeutet aber, dass für genau eine Folge pro Gruppe am Schluss der  $n + 1$ -te Parkplatz frei bleibt. Die Anzahl zulässiger Folgen ist daher  $(n + 1)^n / (n + 1) = (n + 1)^{n-1}$ . □