

Doppeltzählen

1. Beweise die folgenden Identitäten kombinatorisch

$$(a) \binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1},$$

$$(b) (a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i},$$

$$(c) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n},$$

$$(d) \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+r}{r} = \binom{n+r+1}{r}.$$

2. Finde eine geschlossene Formel für den Ausdruck

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^2.$$

3. (CH 99) Zeige, dass man die Menge $\{1, 2, \dots, 33\}$ nicht in 11 disjunkte dreielementige Teilmengen unterteilen kann, sodass in jeder dieser Teilmengen ein Element gleich der Summe der beiden anderen ist.

4. Existiert ein Polyeder mit einer ungeraden Anzahl Flächen, sodass jede Fläche eine ungerade Anzahl Kanten hat?

5. (IMO 77) Sei a_1, a_2, \dots, a_n eine Folge ganzer Zahlen, sodass die Summe von je 7 aufeinanderfolgenden Gliedern positiv und die Summe von je 11 aufeinanderfolgenden negativ ist. Was ist der grösstmögliche Wert von n ?

6. Ein 6×6 Brett sei irgendwie mit 18 Dominosteinen überdeckt. Zeige, dass es stets eine Gerade gibt, die das Brett in zwei Teile zerlegt, ohne einen Dominostein zu zerschneiden.

7. (CH 02) Gegeben sind 24 Punkte im Raum. Je drei dieser Punkte spannen eine Ebene auf, und es ist bekannt, dass die 24 Punkte auf diese Weise genau 2002 verschiedene Ebenen aufspannen. Beweise, dass eine dieser Ebenen mindestens 6 der Punkte enthält.

8. Gegeben sind $2n$ Karten, jede mit einer Zahl beschriftet. Jede der Zahlen $1, 2, \dots, n$ steht dabei auf genau zwei Karten. Die Karten werden so in eine Reihe gelegt, dass zwischen den beiden Karten mit der Zahl k genau k andere Karten liegen. Zeige, dass $n \equiv 0$ oder $n \equiv 1 \pmod{4}$.

9. (IMO 87) Sei $S = \{1, 2, \dots, n\}$ und sei $p_n(k)$ die Anzahl Permutationen von S mit genau k Fixpunkten. Zeige, dass gilt

$$\sum_{k=0}^n k \cdot p_n(k) = n!$$

10. (CH 03) Gegeben sind ganze Zahlen $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{101} < 5050$. Zeige, dass man daraus immer vier verschiedene a_k, a_l, a_m, a_n auswählen kann mit

$$5050 \mid (a_k + a_l - a_m - a_n).$$

11. (IMO 01) Sei $n > 1$ ungerade und seien c_1, c_2, \dots, c_n beliebige ganze Zahlen. Für eine Permutation a der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ sei

$$S(a) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot a(k).$$

Beweise, dass es zwei verschiedene Permutationen a und b gibt, sodass $S(a) - S(b)$ durch $n!$ teilbar ist.

12. (IMO 89) Seien k und n natürliche Zahlen. In der Ebene sei eine Menge S von n verschiedenen Punkten gegeben mit folgenden Eigenschaften:

- (a) Keine drei Punkte von S liegen auf einer Geraden.
- (b) Zu jedem Punkt P aus S gibt es mindestens k verschiedene Punkte aus S , die alle denselben Abstand zu P haben.

Beweise, dass gilt

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

13. Sei S die Menge aller n -Tupel (X_1, \dots, X_n) , wobei X_1, \dots, X_n Teilmengen von $\{1, 2, \dots, 1000\}$ sind, die nicht alle verschieden sein müssen, und die auch leer sein können. Für $a = (X_1, \dots, X_n) \in S$ bezeichne

$$E(a) = \text{Anzahl Elemente von } X_1 \cup \dots \cup X_n.$$

Finde einen expliziten Ausdruck für die Summe

$$\sum_{a \in S} E(a).$$

14. (IMO 98) In einem Wettbewerb gibt es a Teilnehmer und b Preisrichter, wobei $b \geq 3$ eine ungerade Zahl ist. Jeder Preisrichter beurteilt jeden Teilnehmer entweder mit bestanden oder mit durchgefallen. Für die Zahl k gelte: Je zwei Preisrichter stimmen mit ihren Urteilen bei höchstens k Teilnehmern überein. Zeige, dass gilt

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

15. (IMO 01) An einem Mathematikwettbewerb haben 21 Schüler und 21 Schülerinnen teilgenommen. Dabei hat sich folgendes herausgestellt:

- (a) Jeder Schüler und jede Schülerin löste höchstens 6 Aufgaben.
- (b) Für jeden Schüler und jede Schülerin gab es eine Aufgabe, die von beiden gelöst wurde.

Zeige, dass es eine Aufgabe gab, die von mindestens 3 Schülern und von mindestens 3 Schülerinnen gelöst wurde.