Sélection d'exercices OSM avec solutions détaillées

1. Dans une pièce il y a six personnes. Deux personnes sont toujours amis ou ennemis. Montrer que l'on peut toujours en choisir trois parmi ces personnes tels qu'ils sont tous amis ou tous ennemis entre eux.

Exemple de solution

Nous cherchons tout d'abord une forme plus graphique pour considérer le problème. Une telle visualisation peut souvent être le premier pas d'une solution.

Nous représentons les six personnes par six points. Si deux personnes sont amis nous relions les deux points correspondants par une arête verte, sinon par une arête rouge. De cette manière on obtient un hexagone dans lequel chaque côté et chaque diagonale est vert ou rouge. Le but de l'exercice est de montrer que nous pouvons toujours choisir trois points tels que les arêtes qui les relient soient toutes vertes ou toutes rouges. Autrement dit, il faut montrer qu'il y a toujours un triangle vert ou un triangle rouge.

Pour montrer ceci nous choisissons un point arbitraire que nous appelerons P. Chaque arête partant de P est colorée en une de deux couleurs. Donc d'après le *principe des tiroirs* au moins trois de ces arêtes doivent avoir la même couleur. Nous appelons leurs autres extrémités A, B et C. Quitte à échanger les couleurs nous pouvons supposer que ces arêtes sont vertes.

Il y a maintenant deux cas possibles: Si une des arêtes AB, BC ou CA est verte alors ses deux extrémités et P forment un triangle vert et nous avons fini. Mais si les arêtes AB, BC et CA sont toutes rouges alors ABC est un triangle rouge et nous avons également fini.

Remarques. Le *principe des tiroirs* dit ceci:

> Si l'on met $k \cdot n + 1$ chaussettes dans n tiroirs, alors il y a au moins un tiroir qui contient plus que k chaussettes.

C'est un fait trivial qui est souvent utile. Dans la solution ci-dessus les chaussettes sont les cinq arêtes d'extrémité P et les tiroirs les deux couleurs rouge et vert (donc $n = k = 2$). Beaucoup de problèmes combinatoires peuvent être résolus avec cette idée simple, le point crucial étant l'identification des chaussettes et des tiroirs. Une conséquence simple est par exemple que dans chaque grande ville comme Zurich ou Genève il y a toujours deux personnes ayant le même nombre de cheveux. (Pourquoi?)

2. Trois cercles k_1, k_2, k_3 de rayon égal se coupent non-tangentiellement en un point P. Soient A et B les centres de k_1 et k_2. Soit D, respectivement C le point d'intersection de k_3 avec k_1, respectivement k_2, les deux différents de P. Montrer que $ABCD$ est un parallélorgamme.

Exemple de solution

Soit M l'origine de k_3 (voir Figure 1). Considérons le quadrilatère $PBCM$. Comme les cercles ont le même rayon, tous les quatre côtés du quadrilatère sont égaux. Il s'ensuit que $PBCM$ est un losange et qu'en particulier que BC est parallèle à PM. De façon analogue on peut montrer que AD est parallèle à PM. Il s'ensuit que AD est parallèle à BC. Par hypothèse les deux segments sont de longueur égale, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

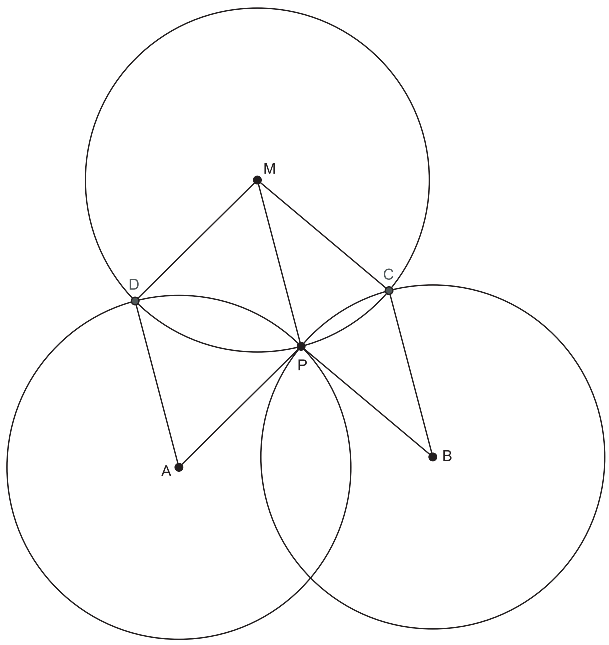

Fig. 1: Solution de l'exercice 2

3. Un tournoi de tennis a eu au moins trois participants. Lors du tournoi, chaque deux joueurs ont joué exactement une fois l'un contre l'autre et chaque joueur a gagné au moins un match. Montrer qu'il existe trois joueurs A, B, C tels que A a battu B, B a battu C et C a battu A.

1ère solution

Choisissons un joueur A tel qu'il fasse partie de ceux qui ont gagné le moins de matches dans le tournoi. Soient U et V les ensembles des joueurs contre lesquels A a gagné, respectivement perdu. Par hypothèse les ensembles U et V ne sont pas vides. Si un joueur B dans U a gagné contre un joueur C dans V, alors A, B, C remplissent les conditions de l'exercice et nous avons fini. Si tous les joueurs de U ont perdu contre tous les joueurs de V, alors les joueurs dans U ont gagné moins de matches que A, ce qui est contredit par notre choix de A.

2e solution

Chacun des n joueurs a gagné au moins 1 et au plus $n-1$ matches. Selon le principe des tiroirs, il existe deux joueurs A et B qui ont gagné le même nombre de matches. Nous pouvons supposer que A a gagné contre B et nous allons appeler U l'ensemble des joueurs qui ont perdu contre B. Il existe alors au moins un joueur C dans U qui a gagné contre A car sinon A aurait gagné contre B ainsi que contre tous les joueurs de U, autrement dit contre au moins un joueur de plus que B, contradiction. Alors A, B, C remplissent les conditions de l'exercice.

3e solution

La notation $X \to Y$ signifie que X a gagné son match contre Y. Nous appelons une suite de joueurs distincts $X_1 \to X_2 \to \ldots \to X_k \to X_1$ un cycle. Montrons qu'il existe au moins un cycle: choisissons un joueur arbitraire A_1. Il a gagné contre au moins un autre joueur A_2. Celui-ci a gagné contre un certain joueur A_3. En continuant de la sorte il y aura un joeur qui apparaît une deuxième fois dans la suite. Chaque séquence minimale entre deux telles répétitions donne un cycle.
Soit maintenant $X_1 \to X_2 \to \ldots \to X_k \to X_1$ un cycle de longueur minimale. Nous allons montrer que $k = 3$, ce qui terminera la preuve car les trois joueurs qui forment le cycle satisferont les conditions de l'exercice. Supposons donc $k > 3$. Si X_1 a gagné contre X_3, alors $X_1 \to X_3 \to X_4 \ldots \to X_k \to X_1$ est un cycle de longueur plus courte, contradiction. Or si X_3 a gagné contre X_1, alors $X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_1$ est un cycle de longueur $3 < k$, de nouveau une contradiction.

4. Soient a, b, c des nombres naturels tels que a divise b^2, b divise c^2 et c divise a^2. Montrer que abc divise

$$a^7 + b^7 + c^7.$$

Exemple de solution

On sait que a est un diviseur de a car chaque nombre est un diviseur de lui-même. D'un autre côté on sait par hypothèse que c est un diviseur de a^2. Montrons maintenant que b divise a^4 : comme c divise a^2, on a que c^2 divise $(a^2)^2 = a^4$. Comme b divise c^2, on obtient finalement que b divise a^4. Il s'ensuit que

$$a \cdot b \cdot c \qquad \text{divise} \qquad a \cdot a^4 \cdot a^2 = a^7.$$

On montre de la même manière que abc divise également b^7 et c^7. Il s'ensuit donc que abc divise chacun des termes de la somme $a^7 + b^7 + c^7$, donc également la somme toute entière.

5. On couvre un carré 6×6 par 18 dominos sans imbrications et sans dépasser les bords. Montrer qu'il existe toujours une droite qui coupe le carré en deux parties mais qui ne divise aucun des dominos.

Exemple de solution

Raisonnons par absurde et supposons que chaque droite divise un domino. Subdivisons le carré en 36 carrés unité et considérons les $2 \cdot 5$ droites qui coupent le carré 6×6 mais aucun des carrés unité. Par hypothèse, chacune de ces droites divise au moins un domino. Nous allons même montrer que g divise au moins *deux* dominos.

La droite g divise le grand carré en deux rectangles de la forme $6 \times k$ et $6 \times (6 - k)$. En particulier dans chacun des deux rectangles il y a un nombre pair de carrés unité. Chaque domino qui se trouve entièrement dans un des rectangles y couvre exactement deux carrés unité. Si un domino est coupé en deux par g, alors il couvre exactement un carré unité dans chacun des rectangles. Il s'ensuit directement que g doit couper en deux un nombre *pair* de dominos, car sinon il n'y aurait qu'un nombre impair de carrés unité couverts de chaque côté de la droite, une contradiction. En particulier nous pouvons conclure que g divise bien au moins deux dominos.

Chacune des dix droites coupe donc au moins deux dominos. De plus il est clair qu'un domino ne peut pas être coupé par plus qu'une droite à la fois. Il s'ensuit donc qu'on doit avoir au moins 20 dominos. Comme par hypothèse nous n'en avons que 18, nous obtenons la contradiction désirée.

Remarques. Ici nous avons appliqué un argument de *calcul double* pour obtenir la contradiction cherchée. Nous avons tout simplement supposé que l'affirmation soit fausse et puis nous avons compté les dominos *de deux manières différentes*. D'un côté nous en avions 18 par hypothèse, de l'autre nous avons obtenu au moins 20 par calcul. La méthode du calcul double est très importante en combinatoire et donne souvent des solutions élégantes.