Vollständige Induktion

Eine der wichtigsten Beweistechniken der Mathematik überhaupt ist die (vollständige) *Induktion*. Wir nehmen an, wir hätten für jede natürliche Zahl n eine Aussage $A(n)$, die richtig oder falsch sein kann. Beispiele für solche Aussagen sind:

1. *Die Zahl n ist gerade.*
2. *Es gilt $1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)/2$.*
3. *Es gibt mindestens eine Primzahl p mit $n \leq p < 2n$.*

Wenn wir nun zeigen können, dass es ein n_0 gibt, sodass $A(n_0)$ richtig ist (*Induktionsverankerung*) und dass aus der Richtigkeit von $A(n)$ jene von $A(n + 1)$ folgt (*Induktionsschritt*), dann sind offenbar alle Aussagen $A(n)$ für $n \geq n_0$ richtig. Denn die Richtigkeit hüpft sozusagen von einem n aufs nächste über. Wir geben gleich mal Beispiele.

Beispiel 1. *Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt*

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Beweis.
Verankerung:
Die Gleichung stimmt sicher für $n = 1$, denn beide Seiten sind dann gleich 1.

Induktionsschritt:
Wir nehmen an, dass die Gleichung für n richtig ist und zeigen, dass sie dann auch für $n+1$ richtig ist. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n + 1) &= \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) \\ &= \frac{n(n + 1) + 2(n + 1)}{2} \\ &= \frac{(n + 1)((n + 1) + 1)}{2}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir in der ersten Zeile die Induktionsannahme verwendet, nämlich, dass die Gleichung für n stimmt. □

Beispiel 2. *In Sikinia gibt es nur Einbahnstrassen. Jedes Paar von Städten ist durch genau eine Strasse verbunden. Zeige, dass es stets eine Stadt gibt, die von jeder anderen Stadt aus direkt oder über höchstens eine andere Stadt erreicht werden kann.*

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis nach der Anzahl Städte n.
Verankerung:
Die Aussage stimmt sicher für $n = 2$ (oder auch für $n = 1$, dann ist sie aber nicht sonderlich interessant).

Induktionsschritt:
Wir nehmen an, dies sei richtig für n beliebige Städte. Eine Stadt, die die Bedingung der Aufgabe erfüllt, nennen wir *gut*. Betrachte nun $n+1$ Städte. Wir wählen uns irgendeine Stadt S aus und betrachten nur die übrigen n Städte. Nach Induktionsvoraussetzung existiert unter diesen eine gute Stadt G. Die übrigen $n-1$ Städte unterteilen wir in zwei Mengen, die Menge D aller Städte, von denen aus man G direkt erreicht, und die Menge E aller Städte, für die das nicht möglich ist. Jede Stadt aus E besitzt dann eine direkte Strasse in eine der Städte in D (da G gut ist). Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

(1) Es gibt eine direkte Strasse von S zu G oder einer Stadt in D. Dann ist G eine gute Stadt für alle $n+1$ Städte.

(2) Von G und von jeder Stadt aus D führt eine direkte Strasse nach S. Dann ist S gut, denn von G und jeder Stadt aus D lässt sich S direkt erreichen und von jeder Stadt aus E via eine Stadt aus D (siehe Erklärung oben).

Somit gibt es stets eine gute Stadt. □

Das zweite Beispiel zeigt, dass man mit Induktion nicht nur Formeln beweisen kann, sondern wirklich auch komplexe Aussagen. Ausserdem zeigt es, dass die Argumentation recht kompliziert sein kann, Induktionsbeweise sind keineswegs immer einfach!

Es gibt noch eine etwas andere Form der vollständigen Induktion, die sogenannte *starke Induktion*. Der Unterschied zur gewöhnlichen besteht darin, dass man im Induktionsschritt nicht nur annimmt, dass $A(n)$ richtig ist, um $A(n+1)$ zu zeigen, sondern dass *alle* $A(k)$, $k \leq n$ richtig sind. Dies ist oft bequemer und einfacher.

Beispiel 3. *Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ besitzt eine Primfaktorzerlegung (das heisst, n ist ein Produkt von endlich vielen Primzahlen).*

Beweis. Wir verwenden starke Induktion nach n. Dies ist richtig für $n = 2$, da 2 eine Primzahl ist. Wir nehmen nun an, dass alle Zahlen $k < n$ eine Primfaktorzerlegung besitzen, n aber keine solche besitzt. Dann ist n sicher nicht prim, das heisst, n ist ein Produkt von zwei natürlichen Zahlen $a > 1$ und $b > 1$. Wegen $a, b < n$ lassen sich a und b nach Induktionsvoraussetzung als Produkt von Primzahlen schreiben. Dann ist aber auch $n = ab$ ein Produkt von Primzahlen, im Widerspruch zu unserer Annahme. Daher besitzt n eine Primfaktorzerlegung und der Induktionsschritt ist komplett. □

Die folgenden Aufgaben geben einen kleinen Überblick über die vielen Anwendungen der vollständigen Induktion.

Aufgaben

1. Zeige, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Zeige:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2 .$$

3. (*Geometrische Reihe*) Für $q \neq 1$ und jede ganze Zahl $n \geq 0$ gilt

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

4. Zeige, dass für alle n gilt

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} < 1.$$

5. Für jede natürliche Zahl n ist $n^3 + 5n$ durch 6 teilbar.

6. Die Zahlen $1007, 10017, 100117, 1001117, \ldots$ sind alle durch 53 teilbar.

7. Die Summe aller weder durch 2 noch durch 5 teilbaren natürlichen Zahlen $< 10n$ beträgt $20n^2$.

8. Die Folge a_n ist definiert durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$. Zeige, dass die Folge monoton steigend und beschränkt ist.

9. Für $n \geq 1$ und $0 \leq x_k \leq 1$ $(1 \leq k \leq n)$ gilt

$$\prod_{k=1}^{n}(1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Wann steht das Gleichheitszeichen?

10. (*Binomialentwicklung*) Für beliebige reelle Zahlen a, b gilt

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

11. (*Fibonacci Folge*) Die Fibonacci Folge ist rekursiv definiert durch

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 2.$$

(a) Es gilt die Formel von Binet:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

(b) $F_n = \binom{n-1}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-3}{2} + \ldots$

(c) $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$.

(d) $\operatorname{ggT}(F_n, F_{n+1}) = 1$ für alle $n \geq 0$.

(e) Sei a_n die Anzahl Wörter der Länge n aus dem Alphabet $\{0, 1\}$, die keine zwei Einsen mit Abstand 2 enthalten. Finde eine Formel für a_n mit Hilfe der Fibonacci Zahlen.

12. Auf einer runden Rennstrecke stehen n identische Autos. Zusammen haben sie genau soviel Benzin, wie ein einziges Auto benötigt, um eine ganze Runde fahren zu können. Ein Auto fährt los, während alle anderen stehen bleiben. Kommt es an einem stehenden Auto vorbei, dann übernimmt es das Benzin aus dem Tank des stehenden Autos. Zeige, dass es ein Auto gibt, das die ganze Runde fahren kann, ohne dass ihm das Benzin ausgeht.

13. Im Raum sind $2n$ Punkte gegeben. Zwischen mindestens $n^2 + 1$ Punktepaaren ist die Verbindungsstrecke der beiden Punkte gezeichet. Zeige, dass es drei Punkte gibt, die alle miteinander verbunden sind.

14. Zeige:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^k} = 2^n.$$

15. n verschiedene Kreise sind in der Ebene gezeichnet. Diese zerlegen die Ebene in verschiedene Regionen. Zeige, dass man diese Regionen stets weiss oder schwarz färben kann, sodass zwei Regionen mit einer gemeinsamen Grenze (also ein Stück eines Kreises) verschieden gefärbt sind.

16. In der Ebene sind $n > 2$ Geraden gezeichnet, sodass keine zwei parallel sind und keine drei einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Diese zerlegen die Ebene in verschiedene Gebiete. Zeige, dass man jedem Gebiet eine ganze Zahl mit Betrag $\leq n$ zuordnen kann, sodass die Summe der Zahlen auf beiden Seiten von jeder Geraden gleich 0 ist.

17. Für jede natürliche Zahl N gilt

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\ldots\sqrt{(N-1)\sqrt{N}}}}} < 3.$$

18. Betrachte alle nichtleeren Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ die keine zwei benachbarten Zahlen enthalten. Bilde für jede dieser Teilmengen das Produkt der Elemente. Zeige, dass die Summe der Quadrate all dieser Zahlen gleich $(n + 1)! - 1$ ist. (Zum Beispiel für $n = 3$: $1^2 + 2^2 + 3^2 + (1 \cdot 3)^2 = 23 = 4! - 1$.)

19. Sei $a \neq 0$ eine reelle Zahl, sodass $a + 1/a \in \mathbb{Z}$. Zeige, dass

$$a^n + \frac{1}{a^n} \in \mathbb{Z} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

20. Sei $n = 2^k$. Zeige, dass man aus $(2n-1)$ ganzen Zahlen stets n auswählen kann, sodass ihre Summe durch n teilbar ist.

21. Gegeben sind $n \geq 3$ Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen. Zeige, dass mindestens n der Verbindungsgeraden zwischen den Punkten verschieden sind.

22. Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und $y_1, y_2, \ldots, y_m$ natürliche Zahlen, $m, n \geq 2$, sodass die Summen $x_1 + \ldots + x_n$ und $y_1 + \ldots + y_m$ gleich und kleiner als mn sind. Zeige, dass man aus der Gleichung $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_m$ einige (nicht alle) Zahlen wegstreichen kann, sodass man wieder eine Gleichung erhält.

23. $n \geq 2$ Leute sitzen an einem runden Tisch in einem Restaurant. Es gibt 3 Menus zur Wahl. Keine der Personen möchte das gleiche essen wie die Nachbarn links und rechts. Auf wieviele Arten können die Leute ihr Essen bestellen?

Tipps zu ausgewählten Aufgaben

1. - 3. Analog zu Beispiel 1.

4. Versuche zuerst eine geschlossene Formel für die Summe zu finden, also einen Ausdruck, der keine solche Summe mehr enthält. Eine Tabelle für kleine Werte von n gibt Hinweise. Beweise diese Formel dann mit Induktion.

5. - 6. Zeige für den Induktionsschritt, dass die Differenz zweier aufeinanderfolgenden Zahlen durch 6 beziehungsweise 53 teilbar ist.

8. Zeige zuerst induktiv, dass a_n beschränkt ist. Eine geeignete obere Schranke ist nicht schwer zu finden.

9. Induktion nach n. Beachte: es wird auch nach den Gleichheitsbedingungen gefragt. Zuerst muss man sich also überlegen (bzw vermuten) in welchen Fällen denn wirklich das Gleichheitszeichen steht. Anschliessend muss man induktiv einerseits die Ungleichung, andererseits aber auch die Gleichheitsbedingung gleich mitbeweisen. Man sollte sorgfältig vorgehen.

10. Hier muss man die Additionsformel $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ für die Binomialkoeffizienten verwenden. Zur Erinnerung, es gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Damit lässt sich obige Formel einfach beweisen.

11. Für (d) verwende man den Euklidschen Algorithmus beziehungsweise die Gleichung $\mathrm{ggT}(a,b) = \mathrm{ggT}(a, b \pm a)$ und die Rekursionsgleichung für die F_n. In (e) sollte man zuerst eine Rekursionsgleichung für die a_n finden. Ein Vergleich mit den Fibonacci Zahlen liefert eine explizite Formel für die a_n.

12. Um den Induktionsschritt machen zu können, muss man ja irgendein Auto entfernen. Damit das aber gut kommt, sollte auch ein passendes Stück der Rennbahn entfernt werden (wieso nämlich?) Was passiert mit dem Benzin im Tank dieses Autos? Hat man mal gesehen, wie das gehen soll, ist der Rest nicht schwer.
Erweiterter Tipp: Es gibt ein Auto, das mit seinem Benzin mindestens bis zum nächsten Auto kommt (wieso?). Entferne dieses Auto und das Stück der Rennbahn zwischen diesem und dem nächsten Auto. Entferne soviel Benzin aus dem Tank dieses Autos, wie es brauchen würde, um zum nächsten zu fahren und kippe den Rest dem nächsten Auto in den Tank. Jetzt kann man die Induktionsannahme verbraten.

13. Auch hier sollte man ja Punkte loswerden, damit die Induktion greift, nämlich genau 2 Stück. Allerdings sollte man darauf achten, nicht allzuviele Verbindungsstrecken mit zu entfernen (wieso?). Geht das immer?

14. Verwende die Formel aus dem Hinweis zu Aufgabe 10.

17. Das ist ein schwieriges Problem. Man muss zwei gute Ideen haben. Erstens ist es zu speziell, es ist erstaunlicherweise einfacher, folgende Verallgemeinerung zu zeigen:

$$\sqrt{m\sqrt{(m+1)\ldots\sqrt{N}}} < m+1$$

für alle $2 \leq m \leq N$. Dies kann man nun mit Induktion nach m (nicht N!) beweisen, aber verkehrt herum. Das heisst, halte N fest und zeige die Ungleichung zuerst für $m = N$ und dann abwärts bis $m = 2$.

19. Die einfache, aber geniale Idee ist, dass man $a^n + 1/a^n$ durch $a + 1/a$ auszudrücken versucht. Versucht euch mal an $n = 2, 3, 4$ und schaut, wie das gehen könnte. Übrigens: allzu explizit müsst ihr das nicht beschreiben, sonst wird es zu schwierig. Es genügt zu erkennen, in welcher grundsätzlichen Weise man $a^n + 1/a^n$ ausdrücken könnte.

21. Hier benötigt man erstmal einen Satz, den wir später (im Lager) beweisen werden:

Liegen n Punkte nicht alle auf einer Geraden, dann gibt es eine Gerade, die genau zwei der Punkte enthält.

Dieser Satz besitzt einen sehr kurzen und eleganten Beweis, der aber schwer zu finden ist. Ihr dürft ihn deshalb einfach verwenden. Für unsere Aufgabe liefert er nun eine Gerade, auf der genau zwei Punkte A und B liegen. Wirf einen davon weg und verwende die Induktionsvoraussetzung. Man kann sich am Beispiel 2 orientieren.

22. Induktion nach $m + n$. Der Fall $m = n = 2$ ist schnell erledigt. Für den Induktionsschritt muss man sich genau überlegen, welche Zahlen man wie wegstreichen könnte. Nicht ganz einfach.

23. Sei a_n diese Anzahl. Zuerst muss man sich eine Rekursionsformel für die a_n überlegen, das ist reine Kombinatorik. Anschliessend sollte man einen expliziten Ausdruck für die a_n finden. Dabei ist es hilfreich, sie die ersten paar Folgeglieder auszurechnen und ein Muster zu suchen. Das könnt ihr dann induktiv beweisen.
Erweiterter Tipp: Es gilt $a_2 = a_3 = 6$ und $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ für $n \geq 4$.