Aufgaben Geometrie Lager

Starter

1. Zwei Städte A und B liegen auf verschiedenen Seiten eines Flusses. An welcher Stelle muss eine Brücke rechtwinklig zum Fluss gebaut werden, damit der Fussweg zwischen den Städten möglichst kurz ist?

2. Gegeben ein Dreieck ABC. Konstruiere mit Zirkel und Lineal ein Quadrat, das zwei aufeinenderfolgde Ecken auf AB, eine Ecke auf BC und eine Ecke auf CA hat.

3. Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten $a = BC$ und $b = CA$. Sei $ABPQ$ ein Quadrat, das den Punkt C nicht enthält. Zeige

$$CQ^2 = a^2 + 2b(a + b).$$

4. Gegeben drei Quadrate mit Seitenlängen $2, 3$ und 6. Zeige, dass man an diesen Quadraten zwei Schnitte durchführen kann, so dass sich die Teile zu einem Quadrat mit Seitenlänge 7 zusammensetzen lassen. Ein Schnitt sei eine beliebige stetige Kurve, die ein Polygon in zwei Stücke teilt.

5. (CH 1998/4) Man bestimme alle Zahlen n, für welche gilt:
Es gibt eine Möglichkeit, ein Quadrat in n Teilquadrate zu zerschneiden.

Klassiker

1. Gegeben ein Dreieck ABC mit D, E, F den Mittelpunkten von BC, CA bzw. AB. Zeige, dass die Fläche des Dreiecks mit Seitenlängen AD, BE, CF drei Viertel so gross ist wie die Fläche von $\triangle ABC$.

2. Gegeben ein gleichseitiges Dreieck ABC.

(a) Zeige, dass sich für jeden beliebigen Punkt P ein Dreieck mit Seitenlängen PA, PB, PC konstruieren lässt.

(b) Sei P ein Punkt auf dem kürzeren Bogen AB des Umkreises von $\triangle ABC$. Zeige, dass dann und nur dann gilt

$$PA + PB = PC.$$

(c) Finde den geometrischen Ort aller Punke P, für die

$$\max\{PA, PB, PC\} = \frac{1}{2}(PA + PB + PC).$$

3. Sei ABC ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H und Umkreismittelpunkt O. Definiere nun:

- M_A, M_B, M_C seien die Mittelpunkte der Seiten BC, CA bzw. AB.
- H_A, H_B, H_C seien die Höhenfusspunkte der Höhen durch A, B bzw. C.
- A', B', C' seien die Mittelpunkte der Strecken HA, HB bzw. HC.

(a) Zeige, dass das Dreieck $A'B'C'$ bei einer halben Drehung um dessen Umkreismittelpunkt auf das Dreieck $M_AM_BM_C$ zu liegen kommt.

(b) Bestätige, dass die neun oben definierten Punkte auf einem Kreis liegen, dem sogenannten *Neun-Punkte-Kreis.*

(c) Zeige, dass das Zentrum des Neun-Punkte-Kreises der Mittelpunkt von OH ist.

4. Im $\triangle ABC$ sei O der Umkreismittelpunkt, S der Schwerpunkt und H der Höhenschnittpunkt. Dann liegen O, S und H in dieser Reihenfolge auf einer Geraden und es gilt $2 \cdot OS = SH$.

5. Im Dreieck ABC sei R der Umkreisradius und r der Inkreisradius. Zeige $R \geq 2r$.

SMO-Stil

1. In $\triangle ABC$ sei M der Mittelpunkt von BC und es gelte $\angle MAC = 2\angle BAM$. Sei D der Schnittpunkt von AM und der Rechtwinkligen zu AB durch B. Zeige

$$AC = \frac{1}{2}AD.$$

2. Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse AB. D und E seien zwei Punkte auf der Strecke AB, sodass gilt $BD = BC$ und $AE = AC$. Seien F und G die Projektionen von D bzw. E auf AC bzw. BC. Zeige

$$DE = DF + EG.$$

3. Gegeben ein spitzwinkliges Dreieck AKL. Das Rechteck $ABCD$ werde so konstruiert, dass K auf der Seite BC und L auf der Seite CD zu liegen kommt. Finde den geometrischen Ort des Diagonalenschmittpunktes von $ABCD$.

4. Sei A der Mittelpunkt des Halbkreises um O mit den Endpunkten B und C. Sei M ein beliebiger Punkt auf der Strecke AB. P und Q seien die Projektionen von A bzw. B auf CM. Beweise

$$CP = PQ + QB.$$

5. Die folgenden alten SMO-Aufgaben: 2002/2, 2002/7.

Hämmer

1. Die drei Quadrate ABB_1A_1, ACC_2A_2 und $BCDE$ werden ausserhalb an die Seiten des Dreiecks ABC konstruiert. Sei P der Mittelpunkt von $BCDE$. Zeige, dass sich die Geraden A_1C, A_2B und AP in einem Punkt schneiden.

2. Im Dreieck ABC sei $\angle BCA = 90°$. Auf der Seite CA gebe es einen Punkt D und auf der Strecke BD einen Punkt K, sodass $\angle ABC = \angle KAD = \angle AKD$. Zeige $BK = 2 \cdot DC$.

3. Ein Punkt P liege im Innern von $\triangle ABC$. Die Gerade BP schneide CA in Q und CP schneide AB in R. Angenommen es gelte $AR = RB = CP$ und $CQ = PQ$. Bestimme $\angle BRC$.

4. Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $\angle BAC = n\angle ABC$ für eine natürliche Zahl n. Zeige, dass dieses Dreieck in gleichschenklige Dreiecke unterteilt werden kann, so dass die Schenkel aller dieser Dreiecke gleich lang sind.

5. Gegeben fünf Punkte auf einem Kreis. Wähle drei Punkte aus und bestimme den Schwerpunkt S dieser drei Punkte. Zeichne die Rechtwinklige durch S zu der Verbindungsgerade der beiden anderen Punkte und zeige, dass es einen Punkt gibt, der immer auf dieser Rechtwinkligen liegt (egal welche drei Punkte zu Beginn gewählt wurden).

Working Backward

1. Sei $ABCDE$ ein reguläres Fünfeck mit einem Punkt P im Innern, für den gilt $\angle PCD = \angle PED = 42°$. Zeige, dass $\triangle ABP$ gleichseitig ist.

2. Es sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und D ein Punkt auf der Seite AB. Man beweise, dass der Inkreis des Dreiecks ADC den Inkreis des Dreiecks DBC genau dann berührt, wenn D der Berührungspunkt des Inkreises von Dreieck ABC mit der Seite AB ist.

3. Sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $|AC| = |BC|$ und Inkreismittelpunkt I. Sei P ein Punkt auf dem Umkreis des Dreiecks AIB, der im Dreieck ABC liegt. Die Geraden durch P, parallel zu CA und CB, schneiden AB in D und E. Die zu AB parallele Gerade durch P schneidet CA und CB in F und G. Zeige, dass sich die beiden Geraden DF und EG auf dem Umkreis des Dreiecks ABC schneiden.

Grenz- oder Spezialfälle betrachten

1. Gegeben seien zwei Halbgeraden g und h mit gemeinsamem Endpunkt A. Auf g und h liegen die beiden verschiebbaren Punkte B bzw. C, so dass $AB + AC$ konstant ist. Zeige, dass es einen festen Punkt $D \neq A$ gibt, so dass alle Umkreise von ABC durch D gehen.

2. (BMO 2006) Sei ABC ein Dreieck mit $AC > AB$. Der Punkt X liege so auf der Halbgeraden BA, dass $BX = CA$ gilt und der Punkt Y liege auf der Seite CA mit $CY = BA$. Die Gerade XY schneide die Mittelsenkrechte von BC in P. Zeige

$$\angle BPC + \angle BAC = 180°.$$

3. Seien a und b zwei Halbgeraden mit gemeinsamem Endpunkt O. A sei ein fester Punkt auf dem Schenkel a. Wähle einen beliebigen Kreis k, der zu a und b tangential liegt. B sei der Berührungspunkt von k und b. Die zweite Tangente an k durch den Punkt A berühre k in C. Zeige, dass es einen festen Punkt P gibt, der immer auf BC liegt, egal wie man k wählt.

Weitere Aufgaben

1. Seien k_1 und k_2 zwei Kreise, deren Mittelpunkte 10 Einheiten voneinander entfernt sind. Die Radien der Kreise seien 1, respektive 3. Finde den geometrischen Ort aller Punkte M, für die zwei Punkte X auf k_1 und Y auf k_2 existieren, so dass M der Mittelpunkt der Strecke XY ist.

2. Seien k_1 und k_2 zwei konzentrische Kreise. Konstruiere eine Gerade, welche die Kreise in dieser Reihenfolge in den Punkten A, B, C und D trifft und gilt $AB = BC = CD$.

3. Finde denjenigen Punkt P, der die Summe der Abstände zu einem gegebenen Dreieck ABC minimiert (dieser Punkt wird Fermat-, Steiner- oder Toricelli-Punkt genannt).

4. Gegeben ein konvexes Fünfeck $PQRST$. Konstruiere das Fünfeck $ABCDE$, das die Punkte P, Q, R, S und T als Mittelpunkte der Seiten hat.

5. Konstruiere ein Trapez, von dem die Längen der Diagonalen, die Länge der Mittellinie und ein Eckwinkel bekannt sind (die Mittellinie verbindet die Mittelpunkte der beiden Schenkel des Trapezes).