IMO Vorbereitung Geometrie

Einige ausgewählte Geometrie-Aufgaben von der IMO (ungefähr der Schwierigkeit nach geordnet).

1. (IMO 03/4) Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck. Ferner seien P, Q und R die Fusspunkte der Lote von D auf die Geraden BC, CA und AB (in dieser Reihenfolge). Man beweise, dass $\overline{PQ} = \overline{QR}$ dann und nur dann gilt, wenn sich die Winkelhalbierenden der Winkel $\angle ABC$ und $\angle ADC$ auf der Geraden AC schneiden !

2. (IMO 04/1) Es sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Der Kreis mit dem Durchmesser BC schneidet die Seiten AB und AC in M bzw. N. Der Mittelpunkt der Seite BC sei O. Die Winkelhalbierenden der Winkel $\angle BAC$ und $\angle MON$ schneiden sich in R. Man beweise, dass die Umkreise der Dreiecke BMR und CNR einen gemeinsamen Punkt haben, der auf der Seite BC liegt.

3. (IMO 95/5) Sei $ABCDEF$ ein konvexes Sechseck mit $AB = BC = CD$ und $DE = EF = FA$, sodass $\angle BCD = \angle EFA = 60°$. Seien G und H zwei Punkte innerhalb des Sechsecks, sodass $\angle AGB = \angle DHE = 120°$. Beweise:

$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CF.$$

4. (IMO 97/2) Es sei $\angle BAC$ der kleinste Winkel im Dreieck ABC. Die Punkte B und C teilen den Umkreis des Dreiecks in zwei Bögen. Es sei U ein innerer Punkt des Bogens zwischen B und C, der nicht A enthält. Die Mittelsenkrechten von AB und AC schneiden die Gerade AU in den Punkten V bzw. W. Die Geraden BV und CW schneiden sich in T. Man beweise

$$\overline{AU} = \overline{TB} + \overline{TC}.$$

5. (IMO 98/1) Im konvexen Viereck $ABCD$ stehen die beiden Diagonalen AC und BD senkrecht aufeinander und die gegenüberliegenden Seiten AB und CD seien nicht parallel. Der Punkt P sei der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AB und CD und liege innerhalb von $ABCD$. Zeige, dass das Viereck $ABCD$ genau dann ein Sehnenviereck ist, wenn die beiden Dreiecke ABP und CDP die gleiche Fläche haben!

6. (IMO 79/3) Seien k_1 und k_2 zwei Kreise und A einer Ihrer Schnittpunkte. Die Punkte P_1 und P_2 starten beide von A aus und wandern auf der Kreislinie um die entsprechenden Kreise. Sie starten gleichzeitig und im gleichen Umlaufsinn. Nach einer Umrundung kommen beide Punkte wieder gleichzeitig bei A an. Zeige, dass es einen Punkt gibt, der zu jeder Zeit zu den Punkten P_1 und P_2 den gleichen Abstand hat.

7. (IMO 98/5) Es sei I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Die Berührungspunkte dieses Inkreises mit den Seiten BC, CA bzw. AB seien K, L bzw. M. Die Gerade durch B parallel zu MK schneidet die Geraden LM bzw. LK in den Punkten R bzw. S. Man beweise, dass $\angle RIS$ ein spitzer Winkel ist !

8. (IMO 01/1) Sei ABC ein spitzwinkliges Dreieck mit Umkreismittelpunkt O. P sei der Höhenfusspunkt der Höhe h_a. Nehmen wir an es gelte $\angle BCA \geq \angle ABC + 30°$.
Beweise, dass $\angle CAB + \angle COP < 90°$.

9. (IMO 05/1) Auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks ABC werden sechs Punkte folgendermaßen gewählt: A_1 und A_2 auf BC, B_1 und B_2 auf CA sowie C_1 und C_2 auf AB, wobei diese Punkte die Eckpunkte eines konvexen Sechsecks $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ mit gleich langen Seiten sind. Man beweise, dass sich die Geraden A_1B_2, B_1C_2 und C_1A_2 in einem Punkt schneiden.

10. (IMO 01/5) In einem Dreieck ABC seien AP die Winkelhalbierende von $\angle BAC$ und BQ die Winkelhalbierende von $\angle ABC$, wobei P auf BC und Q auf AC liegen. Es ist bekannt, dass $\angle BAC = 60°$ und $\overline{AB} + \overline{BP} = \overline{AQ} + \overline{QB}$ gelten. Welche Werte können die Winkel des Dreiecks ABC haben ?

11. (IMO 96/2) Sei P ein Punkt innerhalb des Dreiecks ABC, sodass

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$$

Seien D und E die Inkreismittelpunkte der Dreiecke APB, respektive APC. Zeige, dass sich AP, BD und CE in einem Punkt schneiden.

12. (IMO 99/5) Zwei Kreise Γ_1 und Γ_2 liegen innerhalb des Kreises Γ und berühren Γ in den verschiedenen Punkten M bzw. N. Γ_1 geht durch den Mittelpunkt von Γ_2. Die Gerade durch die zwei Schnittpunkte von Γ_1 mit Γ_2 schneidet Γ in A und B. Die Geraden MA und MB schneiden Γ_1 in C bzw. D. Man beweise, daß CD Tangente an Γ_2 ist!

13. (IMO 04/5) In einem konvexen Viereck $ABCD$ halbiere die Diagonale BD weder den Winkel ABC noch den Winkel CDA. Es sei P ein Punkt im Innern des Vierecks $ABCD$, der die Gleichungen $\angle PBC = \angle DBA$ und $\angle PDC = \angle BDA$ erfüllt. Man beweise, dass das Viereck $ABCD$ dann und nur dann ein Sehnenviereck ist, wenn $\overline{AP} = \overline{CP}$.

14. (IMO 05/5) Gegeben sei ein konvexes Viereck $ABCD$, in dem die Seiten BC und AD gleich lang und nicht parallel sind. Auf den Seiten BC bzw. AD werden die inneren Punkte E bzw. F so gewählt, dass $|BE| = |DF|$ gilt. Die Geraden AC und BD schneiden sich in P, die Geraden BD und EF schneiden sich in Q und die Geraden EF und AC schneiden sich in R. Es werden alle Dreiecke PQR betrachtet, wenn E und F variieren.
Man beweise, dass die Umkreise dieser Dreiecke einen von P verschiedenen gemeinsamen Punkt haben.

15. (IMO 03/3) Gegeben sei ein konvexes Sechseck, in dem je zwei gegenüberliegende Seiten die folgende Eigenschaft haben: Der Abstand ihrer Mittelpunkte ist das $\frac{\sqrt{3}}{2}$-fache der Summe ihrer Längen. Man beweise, dass alle Winkel des Sechsecks gleich gross sind !

16. (IMO 00/6) Es seien AH_1, BH_2 und CH_3 die Höhen des spitzwinkligen Dreiecks ABC. Der Inkreis des Dreiecks ABC berührt die Seiten BC, CA bzw. AB in den Punkten T_1, T_2 bzw. T_3. Die Geraden l_1, l_2 bzw. l_3 seien die Bilder der Geraden H_2H_3, H_3H_1 bzw. H_1H_2 bei der Spiegelung an den Geraden T_2T_3, T_3T_1 bzw. T_1T_2. Man beweise, dass l_1, l_2 und l_3 ein Dreieck erzeugen, dessen Eckpunkte auf dem Inkreis des Dreiecks ABC liegen !