

# Aufgaben Geometrie III

## Pappus

1. Sei  $ABC$  ein spitzwinkliges Dreieck und die Höhenfußpunkte der Höhen durch  $B$  und  $C$  seien  $P$  bzw.  $Q$ . Zeige, dass sich die Tangenten an den Umkreis von  $\triangle APQ$  bei  $P$  und  $Q$  auf  $BC$  schneiden.
2. Sei  $ABCD$  ein konvexes Viereck mit Inkreis  $k$ .  $k$  berühre  $AB, BC, CD, DA$  in den Punkten  $M, N, P$  bzw.  $Q$ . Zeige, dass sich die Geraden  $AC, BD, MP, NQ$  in einem Punkt schneiden.
3. Die Eckpunkte des konvexen Vierecks  $ABCD$  liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt  $O$ . Zudem habe  $ABCD$  einen Inkreis mit Mittelpunkt  $I$ . Die Diagonalen  $AC$  und  $BD$  schneiden sich in  $P$ . Zeige, dass  $O, I$  und  $P$  auf einer Geraden liegen.

## Rechnen

### Trigonometrie

1. Für ein beliebiges Dreieck mit den Eckwinkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  gilt

$$\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma) = \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta) \cdot \tan(\gamma)$$

und

$$\cot(\alpha/2) + \cot(\beta/2) + \cot(\gamma/2) = \cot(\alpha/2) \cdot \cot(\beta/2) \cdot \cot(\gamma/2).$$

2. Auf einer Kreislinie  $k$  liegen drei paarweise verschiedene Punkte  $A, B$  und  $C$ . Die Geraden  $h$  und  $g$  stehen im Punkt  $B$  bzw.  $C$  auf der Sehne  $BC$  senkrecht. Die Mittelsenkrechte der Sehne  $AB$  schneide die Gerade  $h$  im Punkt  $F$ , die Mittelsenkrechte von  $AC$  schneide  $g$  in  $G$ . Man beweise, dass das Produkt  $|BF| \cdot |CG|$  von der Lage des Punktes  $A$  unabhängig ist, wenn die Punkte  $B$  und  $C$  festgehalten werden.
3. Sei  $ABCD$  ein Sehnenviereck. Ein Kreis  $k$  habe den Mittelpunkt auf der Strecke  $AB$  und die Geraden  $BC, CD$  und  $DA$  liegen tangential an  $k$ . Zeige

$$AD + BC = AB.$$

### TrigCeva

1. Fast wichtiger als der Satz von Ceva selber ist die trigonometrische Form davon, bekannt unter dem Namen TrigCeva.  $P, Q, R$  seien Punkte auf den Strecken  $BC, CA$  bzw.  $AB$ . Die Geraden  $AP, BQ, CR$  schneiden sich genau dann in einem Punkt, wenn gilt

$$\frac{\sin(\angle BAP)}{\sin(\angle PAC)} \cdot \frac{\sin(\angle CBQ)}{\sin(\angle QBA)} \cdot \frac{\sin(\angle ACR)}{\sin(\angle RCB)} = 1.$$

2. Sei  $ABC$  ein beliebiges Dreieck mit Inkreismittelpunkt  $I$ .  $D, E, F$  seien die Projektionen von  $I$  auf  $BC, CA$  bzw.  $AB$ .  $M, N, P$  seien Punkte auf den Strecken  $EF, FD$  bzw.  $DE$ . Zeige, dass sich die Geraden  $AM, BN, CP$  genau dann in einem Punkt schneiden, wenn sich die Geraden  $DM, EN, FP$  in einem Punkt schneiden.

## Vektoren

1. Sei  $ABCDEF$  irgendein Sechseck und seien  $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$  die Schwerpunkte der Dreiecke  $ABC, BCD, CDE, DEF, EFA$  bzw.  $FAB$ . Zeige, dass die gegenüberliegenden Seiten im Sechseck  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  parallel und gleich lang sind.
2. Die Diagonalen eines Vierecks stehen genau dann rechtwinklig aufeinander, wenn die Summe der Quadrate zweier gegenüberliegender Seiten gleich gross ist.
3. Sei  $ABCD$  ein Sehnenviereck. Betrachte die Geraden, die durch den Mittelpunkt einer Seite gehen und rechtwinklig auf der gegenüberliegenden Seite stehen. Dabei werden die Diagonalen als zwei gegenüberliegende Seite angesehen. Zeige, dass sich diese sechs Geraden in einem Punkt treffen.
4. Sei  $P$  ein Punkt im Innern eines gegebenen Kreises  $k$ . Zwei Strahlen mit Ursprung  $P$ , welche senkrecht aufeinander stehen, schneiden  $k$  in den Punkten  $A$  und  $B$ . Sei  $Q$  der Punkt, so dass  $PAQB$  ein Rechteck ist. Finde den geometrischen Ort von  $Q$ , für alle solchen Paare von Strahlen.
5. Sei  $ABC$  ein beliebiges Dreieck. Zeige, dass es genau einen Punkt  $X$  gibt, so dass die Summe der Quadrate der Seiten der Dreiecke  $XAB, XBC, XCA$  alle gleich sind.

## Zu Beispiel 7 (Seite 9)

1. Sei  $ABCD$  ein Parallelogramm mit  $a = AB, b = BC, e = AC$  und  $f = BD$ . Zeige

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$

2. Sei  $ABCD$  ein konvexes Trapez mit  $AB \parallel CD$ . Sei  $a = AB, b = BC, c = CD, d = DA, e = AC$  und  $f = BD$ . Zeige

$$e^2 + f^2 = b^2 + d^2 + 2ac.$$

3. Sei  $ABC$  ein Dreieck und  $D$  der Mittelpunkt von  $BC$ . Sei  $a = BC, b = CA, c = AB$  und  $s_a = AD$ . Zeige

$$s_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

4. Gleiche Situation wie bei der vorherigen Aufgabe. Sei  $S$  der Schwerpunkt von  $\triangle ABC$ . Zeige

$$AS \perp BS \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5c^2.$$

## Komplexe Zahlen

1. (Napoleon) Drei gleichseitige Dreiecke werden ausserhalb auf die Seiten eines beliebigen Dreiecks konstruiert. Zeige, dass die Schwerpunkte dieser Dreiecke ein gleichseitiges Dreieck bilden.
2. Sei  $ABC$  ein gleichseitiges Dreieck. Eine zu  $AC$  parallele Gerade schneide  $AB$  und  $BC$  in  $M$  bzw.  $P$ . Sei  $D$  der Schwerpunkt von  $\triangle PMB$  und  $E$  der Mittelpunkt von  $AP$ . Finde die Winkel von  $\triangle DEC$ .
3. Die Diagonalen des konvexen Vierecks  $ABCD$  schneiden sich in  $O$ . Seien  $S_1$  und  $S_2$  die Schwerpunkte von  $\triangle AOB$  bzw.  $\triangle COD$  und  $H_1, H_2$  die Höhenschnittpunkte von  $\triangle BOC$  bzw.  $\triangle DOA$ . Zeige

$$S_1S_2 \perp H_1H_2.$$

4.  $\triangle OAB$  und  $\triangle OA'B'$  seien zwei gleichseitige Dreiecke mit gleichem Umlaufsinn. Der Schwerpunkt von  $\triangle OAB$  sei  $S$  und die Mittelpunkte von  $A'B$  und  $AB'$  seien  $M$  bzw.  $N$ . Zeige  $\triangle SMB' \sim \triangle SNA'$ .
5. Gegeben seien ein spitzwinkliges Dreieck  $ABC$  und ein Punkt  $D$  innerhalb des Dreiecks, so dass  $\angle ADB = \angle ACB + 90^\circ$  und  $AC \cdot BD = AD \cdot BC$ .

(i) Man berechne

$$\frac{AB \cdot CD}{AC \cdot BD}$$

(ii) Man beweise, dass die Tangenten an die Umkreise der Dreiecke  $ACD$  und  $BCD$  im Punkt  $C$  aufeinander senkrecht stehen.

### Kartesische Koordinaten

1. Sei  $ABC$  ein gleichschenkliges Dreieck mit  $AB = AC$  und sei  $P$  ein Punkt auf der Geraden  $BC$ . Die Punkte  $X$  und  $Y$  liegen auf  $AB$  bzw.  $AC$ , so dass

$$PX \parallel AC \quad PY \parallel AB.$$

Weiter sei  $T$  der Mittelpunkt des Bogens  $BC$  ( $T \neq A$ ). Zeige  $PT \perp XY$ .

2. Gegeben zwei konzentrische Kreise mit Radien  $R > r$ . Sei  $P$  ein fester Punkt auf dem kleineren und  $B$  ein mobiler Punkt auf dem grösseren Kreis. Die Gerade  $BP$  schneide den grösseren Kreis nochmals in  $C$ . Die Rechtwinklige zu  $BP$  durch  $P$  schneide den kleineren Kreis nochmals in  $A$ .
  - (i) Finde alle Werte, die der Ausdruck  $BC^2 + CA^2 + AB^2$  annehmen kann.
  - (ii) Finde den geometrischen Ort des Mittelpunktes von  $BC$ .

### Geometrische Ungleichungen

1. Gegeben sind zwei Kreise  $k_1$  und  $k_2$ , die sich in den verschiedenen Punkten  $P$  und  $Q$  schneiden. Konstruiere eine durch  $P$  verlaufende Strecke  $AB$  mit ihren Endpunkten auf  $k_1$  und  $k_2$ , sodass das Produkt  $AP \cdot PB$  maximal ist.
2. Es sei  $ABC$  ein gleichseitiges Dreieck und  $P$  ein Punkt in dessen Innern. Die Geraden  $AP$ ,  $BP$  und  $CP$  schneiden die Seiten  $BC$ ,  $CA$  bzw.  $AB$  in den Punkten  $X$ ,  $Y$  bzw.  $Z$ . Beweise, dass gilt

$$XY \cdot YZ \cdot ZX \geq XB \cdot YC \cdot ZA.$$

3. Sei  $d$  der Abstand zwischen dem Umkreismittelpunkt und dem Schwerpunkt im Dreieck  $ABC$  und seien  $R$  und  $r$  der Umkreis- bzw. Inkreisradius. Zeige

$$d^2 \leq R(R - 2r).$$

4. Seien  $a, b, c$  Seitenlängen eines Dreiecks. Zeige

$$b^2c(b - c) + c^2a(c - a) + a^2b(a - b) \geq 0.$$

5. Sei  $ABCDEF$  ein konvexes Sechseck, so dass

$$AB \parallel DE \quad BC \parallel EF \quad CD \parallel FA.$$

Seien  $R_A, R_B, R_C$  die Umkreisradien der Dreiecke  $FAB, BCD$  bzw.  $DEF$  und sei  $P$  der Umfang des Sechsecks. Zeige

$$R_A + R_B + R_C \geq \frac{P}{2}.$$

## Weitere Aufgaben

1. Sei  $O$  der Umkreismittelpunkt von  $\triangle ABC$ , sei  $D$  der Mittelpunkt von  $AB$  und sei  $E$  der Schwerpunkt von  $\triangle ACD$ . Zeige

$$CD \perp OE \quad \Leftrightarrow \quad AB = AC.$$

2. Gegeben drei verschiedene Punkte  $A, B$  und  $C$ , die in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen. Sei  $k$  ein Kreis durch  $A$  und  $C$ , wobei der Mittelpunkt von  $k$  nicht auf  $AC$  liegt. Die Tangenten an  $k$  durch  $A$  und  $C$  schneiden sich in  $P$  und die Strecke  $PB$  schneidet  $k$  in  $Q$ .

Zeige, dass der Schnittpunkt von  $AC$  mit der Winkelhalbierenden von  $\angle AQC$  unabhängig von der Wahl von  $k$  ist.

3. Sei  $ABC$  ein Dreieck mit Umkreismittelpunkt  $O$ , Umkreisradius  $R$ , Inkreismittelpunkt  $I$  und Inkreisradius  $r$ . Zeige

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$

4. Alle Geometrieaufgaben der IMO der letzten zehn Jahre.