Tipps Geometrie I - Winkeljagd

Winkel im Dreieck

1. Sei P der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle ABC$ mit AC. Betrachte dann die Winkelsumme im Dreieck BCP.

2. Sei wie üblich $\alpha = \angle CAB$ und $\beta = \angle CBA$. Einer der beiden Winkel α oder β muss kleiner oder gleich 45° sein. OBdA sei dies α (OBdA = Ohne Beschränkung der Allgemeinheit; ist $\alpha > 45°$, kann man α und β einfach beide umbenennen). Die gesuchten Winkel sind dann beide $45° - \alpha$ gross. Um das herzuleiten brauchst du die wichtige Tatsache, dass $\triangle MCA$ gleichschenklig ist, und dass $\angle BHC = 90°$.

3. Mit Winkeljagd kommt man auf die beiden gleichschenkligen Dreiecke $\triangle MBD$ und $\triangle LCD$. Als Lösung erhält man $LM = s - t$.

Winkel im Kreis

1. Mit dem Peripheriewinkelsatz über dem Bogen AD findet man $\angle ABD = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$. Der Winkel CBE ist gleich gross. Nun muss man die drei Winkel bei B nur noch zusammenzählen.

2. Betrachte zuerst den Grenzfall, d.h. nehme an, D liege auf k. Du findest dann über die Winkelsumme von $\triangle ABC$ wie erwartet $\angle ABC = 72°$. Die Aufgabe kann man nun lösen, indem man $\angle ABC$ grösser macht (A verschiebt sich dabei auf k) und zeigt, dass sich dann D ins Innere des Kreises bewegt (eine andere Möglichkeit wäre es eigentlich D zu verschieben und zu zeigen, dass $\angle ABC$ dabei grösser wird. Dies stellt sich hier jedoch als sehr heikel heraus).

3. Diese Aufgabe hat im Grunde genommen eine kurze Lösung, man muss jedoch die richtigen Vermutungen haben und das macht es zu einem schwierigen Problem. Wir zeigen $\angle A_0B_0C_0 = \angle A_0C_0B_0$, indem wir zeigen $\angle A_0B_0B = \angle CC_0B_0$ und $\angle BB_0C_0 = A_0C_0C$. S ist der Mittelpunkt von AA_0 und B' ist der Mittelpunkt von AC. Somit sind die Geraden $B'S$ und CA_0 parallel. Daraus folgt, dass B_0BA_0C ein gleichschenkliges Trapez ist, d.h. die Strecken CB_0 und A_0B sind gleich lang, was bedeutet $\angle A_0B_0B = \angle CC_0B_0$. Die Beziehung $\angle BB_0C_0 = A_0C_0C$ leitet man analog her.

Sehnenvierecke

1. Die vier Punkte B, C, Q und P bilden ein Sehnenviereck. Wichtig ist ebenfalls, dass die Winkel ADP und PCB gleich gross sind.

2. Zeige, dass zwei gegenüberliegende Winkel zusammen 180° ergeben. Teile dazu die Winkel auf und benutze die vier vorhandenen Sehnenvierecke.

3. (Monatsaufgabe Dezember 2004, Lösung auf der Homepage) Es gilt $PB = EA$ und $BQ = FA$. Versuche zu zeigen, dass gilt $\angle PM_1B = \angle EM_1A$. Übrigens ist AM_1EFM_2 ein Sehnenfünfeck!

Aufgaben aus vergangenen Olympiaden

Eine kleine Auswahl, komplette Lösungen zu allen Aufgaben findet ihr ja auf der Homepage.

1. (SMO 04/1) Benenne $\angle APD = \alpha$ und $\angle PCA = \beta$. Mit dem Ausswinkelsatz findest du erstens $\angle AED = \alpha+\beta$. Mit dem Tangentenwinkelsatz und dem Aussenwinkelsatz ergibt sich zweitens $\angle ADE = \alpha + \beta$.

2. (SMO 99/1) Ein Fall für den Tangentenwinkelsatz. Dies ist übrigens ein Grenzfall von Aufgabe 2 bei 'Weitere Aufgaben'.

3. (SMO 01/7) Bezeichne $\angle CAO = \alpha$ und $\angle OAB = \beta$ und mache Winkeljagd. Was du hier noch speziell beachten musst, ist die Lage von P und Q. Liegen sie auf verschiedenen Seiten der Geraden AB, sieht die Situation ganz anders aus, als wenn sie beide auf der gleichen Seite sind. Man unterscheidet also zwei Fälle.

4. (SMO 00/1) Diese Aufgabe kann man mit Winkeljagd lösen, ist aber sehr mühsam und unübersichtlich. Schöner wirds, wenn man die Aufgabe verallgemeinert. Überlege dir folgenden Satz:

> Sei P der Schnittpunkt der Diagonalen eines Sehnenvierecks $ABCD$, dann ist der Winkel $\angle APB$ gleich der Summe der beiden Peripheriewinkel über den Sehnen AB und CD.

Benennen wir bei der Aufgabe die Bogenmittelpunkte mit P, Q, R und S, dann bleibt nach Anwendung dieses Satzes noch zu zeigen, dass die beiden Bogen $\widehat{PQ}$ und $\widehat{RS}$ zusammen genau einen Halbkreis ergeben.

5. (SMO Vorselektion 03/2) Diese Aufgabe kann man mit reinen Symmetrie-Überlegungen lösen und ist gar nicht so einfach. Wegen dem Thaleskreis ist AD parallel zu EC. Der Schnittpunkt von AD mit BC sei P und die Projektion von E auf AD sei Q. Zeige, dass die Aufgabe bewiesen ist, wenn du zeigen kannst, dass $AQ = PD$ gilt. Die Symmetrie-Überlegung geht nun so:
Sei m die Rechtwinklige zu AD durch O. Bei der Spiegelung an m geht A in D und E in C über (warum?). Aus diesem Grund sind die Strecken AE und DC gleich lang. Weil EC parallel zu AD ist, sind auch QE und PC gleich lang. Wegen den rechten Winkeln sind die Dreiecke AQE und DPC also kongruent und die Strecken AQ und PD gleich lang.

6. (SMO 04/9) Es ist hier sehr naheliegend einen Punkt P auf der Strecke BC zu definieren mit $BP = BA$ und $CP = CD$. Nun definieren wir $\angle APB = \alpha$ und $\angle CPD = \beta$. Mit Winkeljagd finden wir $\angle DCP = 180° - 2\beta$ und darum $\angle BAD = 2\beta$. Analog zeigen wir $\angle ADC = 2\alpha$.
Der zweite Teil geht am besten mit Working Backward. Für gewöhnlich würde man jetzt die beiden Winkelhalbierenden miteinander schneiden und irgendwie zu zeigen versuchen, dass dieser Schnittpunkt auf BC liegt. Nach einer Weile merkt man, dass man da nicht weiterkommt man einen anderen anderen Ansatz braucht. Tatsächlich besser geht es, wenn man die Sache von einer anderen Seite angeht. Wir definieren den Punkt W als Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden von $\angle BAD$. OBdA können wir auch annehmen, dass W auf der Strecke BP liegt (andernfalls umbenennen). Da $\angle WAD = \beta$ und $\angle DPW = 180° - \beta$, ist $AWPD$ ein Sehnenviereck und darum $\angle ADW = \angle APW = \alpha$. DW ist die Winkelhalbierende von $\angle ADC$. W ist also der Schnittpunkt der beiden Winkelhalbierenden und liegt nach Konstruktion auf BC.

Weitere Aufgaben

1. Um zu zeigen, dass P Inkreismittelpunkt ist, genügt es zu zeigen, dass P auf zwei Winkelhalbierenden von $\triangle AMH$ liegt. Auf einer liegt er nach Konstruktion. Die andere müsste MN sein. Falls du nicht mehr weiterkommst, zeichne mal den Thaleskreis über der Strecke AB ein.

2. (a) Zeichne unbedingt die gemeinsame Sehne PQ ein und wende dann zweimal den Peripherie-Zentriwinkel-Satz an.

(b) Zu zeigen ist $AD \parallel BC$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\angle ABC + \angle BAD = 180°$. Dafür kannst du das Resultat von (a) zur Hilfe nehmen.

3. Working Backward! Das heisst hier, dass du einen Punkt P auf CI so definierst, dass $PI = PB$ gilt. Was du dann zeigen musst, ist dass auch $PI = PA$ gilt. Du kannst das mit Winkeljagd zeigen, brauchst aber noch ein Sehnenviereck zu finden. Tipp: $APBC$ ist ein Sehnenviereck.