Aufgaben Geometrie I - Winkeljagd

Winkel im Dreieck

1. Sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit $AB = AC$. Beweise, dass wenn die Winkelhalbierende von $\angle ABC$ rechtwinklig auf AC steht, dann ist $\triangle ABC$ gleichseitig.

2. Im rechtwinkligen Dreieck ABC sei M der Mittelpunkt der Hypotenuse AB, H der Höhenfusspunkt der Höhe durch C und W der Schnittpunkt von AB mit der Winkelhalbierenden von $\angle ACB$. Zeige

$$\angle HCW = \angle WCM.$$

3. Sei $\triangle ABC$ ein beliebiges Dreieck mit $AB > AC$. Die Winkelhalbierende des Aussenwinkels von $\triangle ABC$ bei C schneide die Winkelhalbierende von $\angle ABC$ in D. Die Parallele zu BC durch D schneide CA in L und AB in M.
Wie lang ist die Strecke LM, ausgedrückt durch die Streckenlängen $s = BM$ und $t = CL$?

Winkel im Kreis

1. Sei ABC ein beliebiges Dreieck mit Inkreismittelpunkt I. Die Gerade CI schneide den Umkreis von $\triangle ABI$ ein weiteres Mal in D und AI schneide den Umkreis von $\triangle BCI$ ein weiteres Mal in E. Zeige, dass die Punkte D, E und B auf einer Geraden liegen.

2. Seien A und B zwei verschiedene Punkte auf dem Kreis k. Der Punkt C liege auf der Tangente an k durch B und es gelte $AB = AC$. Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden von $\angle ABC$ mit AC sei D. Angenommen D liege im Innern von k. Zeige $\angle ABC > 72°$.

3. Die Schwerlinien AA', BB' und CC' im Dreieck ABC schneiden den Umkreis von $\triangle ABC$ ein weiteres Mal in A_0, B_0 bzw. C_0. (Diese Formulierung bedeutet automatisch, dass A', B', C' die entsprechenden Seitenmittelpunkte von $\triangle ABC$ sind.) Der Schwerpunkt S halbiere die Strecke AA_0. Zeige, dass $\triangle A_0B_0C_0$ gleichschenklig ist.

Sehnenvierecke

1. Sei $ABCD$ ein Rechteck und P sei der Mittelpunkt der Seite AB. Q sei die Projektion von C auf die Gerade PD (d.h. Q liegt so auf PD, dass CQ und PD rechtwinklig zueinander liegen). Zeige, dass $\triangle BQC$ gleichschenklig ist.

2. Sei $ABCD$ ein konvexes Viereck, wobei die Diagonalen rechtwinklig aufeinander stehen (*konvex* bedeutet für n-Ecke, dass alle Innenwinkel $\leq 180°$ sind). P sei der Diagonalenschnittpunkt. Zeige, dass die vier Projektionen von P auf die Geraden AB, BC, CD und DA ein Sehnenviereck bilden.

3. Zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Mittelpunkten M_1 bzw. M_2 schneiden sich in den Punkten A und B. Die Gerade M_1B schneide k_2 in $F \neq B$ und M_2B schneide k_1 in $E \neq B$. Die Parallele von EF durch B schneide k_1 und k_2 in den weiteren Punkten P bzw. Q.
Zeige $PQ = AE + AF$.

Aufgaben aus vergangenen Olympiaden

Eine sehr gute Möglichkeit zu üben bieten alte Prüfungen, denn erstens seht ihr so den Schwierigkeitsgrad, der euch in etwa erwartet, und zweitens findet ihr ausführliche Lösungen auf der Homepage. Die Musterlösung anzuschauen bringt euch aber nur etwas, wenn ihr schon eine Zeit lang an der Aufgabe gearbeitet oder sie gelöst habt.
An früheren SMOs wurden in der Vorrunde manchmal etwas andere Themen behandelt. Gut geeignet fürs Training in diesem Jahr sind folgende Aufgaben.

1. (SMO Vorrunde 2005/1) Sei $ABCD$ ein Rechteck mit $AD \leq AB$. Sei M der Mittelpunkt der Strecke AD und N der Mittelpunkt der Strecke BC. Der Punkt E sei die Projektion von B auf die Gerade CM.

(a) Zeige, dass $ANEM$ ein gleichschenkliges Trapez ist.

(b) Zeige, dass die Fläche des Vierecks $ABNE$ halb so gross ist, wie die Fläche von $ABCD$.

2. (SMO Finalrunde 2004/1) Sei Γ ein Kreis und P ein Punkt ausserhalb von Γ. Eine Tangente von P an den Kreis berühre ihn in A. Eine weitere Gerade durch P schneide Γ in den verschiedenen Punkten B und C. Die Winkelhalbierende von $\angle APB$ schneide AB in D und AC in E. Beweise, dass das Dreieck ADE gleichschenklig ist.

3. (SMO Vorrunde 2005/4) Sei ABC ein Dreieck mit $\angle BAC = 60°$. Finde alle Punkte P im Innern dieses Dreiecks mit folgender Eigenschaft:

Ist D die Projektion von P auf die Gerade BC, E die Projektion von P auf CA und F die Projektion von P auf AB, dann gilt $\angle EDF = 30°$.

Weitere Aufgaben auf Vorrunden-Niveau: SMO 1999/1, SMO 2001/7.
Aufgaben, die für SMO Vorrundenprüfung zu schwierig wären, sich jedoch mit den Sätzen aus dem Winkeljagd-Skript lösen lassen: SMO 2005/1, SMO 2002/2, SMO 2000/1, IMO-Selektion 2003/8, SMO 2000/8, SMO 2004/9.
Einige IMO-Aufgaben zum Thema (zu finden auf www.kalva.demon.co.uk oder www.mathematik-olympiaden.de/IMOs/imo.htm oder www.google.ch): IMO 2004/1, IMO 1997/2, IMO 2002/2, IMO 2001/1, IMO 1979/3.

Weitere Aufgaben

1. Im Dreieck $\triangle ABC$ seien M und N die Mittelpunkte der Strecken AB bzw. AC. Der Höhenfusspunkt der Höhe durch A sei H und P sei der Schnittpunkt der Geraden MN mit der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle HAB$. Zeige, dass P der Inkreismittelpunkt von $\triangle AMH$ ist.

2. Zwei Kreise mit den Mittelpunkten O_1 und O_2 schneiden sich in den Punkten P und Q. Eine beliebige Gerade durch P schneide den ersten Kreis nochmals in A und den zweiten Kreis in B. Eine andere Gerade durch Q schneide den ersten Kreis in D und den zweiten nochmals in C. Beweise

(a) $\angle PO_1D = \angle PO_2C$.

(b) $ABCD$ ist ein Trapez.

3. I sei der Inkreismittelpunkt von $\triangle ABC$. Zeige, dass der Umkreismittelpunkt des Dreiecks AIB auf CI liegt.