# Färbungsbeweise

Thomas Huber

29. November 2008

Wir werden an drei verschiedenen Beispielen erklären, was ein Färbungsbeweis ist, und wie man vertrackte Probleme durch Einsatz einer geeigneten Färbung lösen kann.

Eine wichtige Klasse von Beispielen sind sogenannte *Tiling Problems*, bei denen es grob gesagt um die Frage geht, ob man einen gegebenen Küchenboden mit Kacheln eines bestimmten Typs lückenlos und überlappungsfrei bedecken kann. Die "Böden" sind dabei in lauter Einheitsquadrate unterteilt und die "Kacheln" sollen stets so angeordnet werden, dass ihre Kanten auf den Seiten dieser Quadrate zu liegen kommen.

Ein prototypische Beispiel ist das folgende alte Problem: Auf wieviele verschiedene Arten kann man ein $8\times 8$-Brett mit $2\times 1$-Dominosteinen bedecken? Der Physiker M.E. Fischer hat 1961 als erster die richtige Lösung gefunden: es geht auf $2^4\cdot 901^2 = 12988816$ verschiedene Arten. Was passiert nun, wenn man bei diesem Brett zwei diagonal gegenüberliegende Eckfelder entfernt, auf wieviele Arten lässt sich diese Figur mit 31 Dominosteinen bedecken? Die zweite Frage scheint noch schwieriger als die erste zu sein, denn die Form des Brettes ist komplizierter. In der Tat ist sie aber viel einfacher, es geht überhaupt nicht! Dies lässt sich mit einer geeigneten Färbung ganz einfach zeigen:

**Beispiel 1.** *Von einem* $8\times 8$*-Brett werden zwei diagonal gegenüberliegende Eckfelder entfernt. Zeige, dass es unmöglich ist, diese Figur mit* 31 *Dominosteinen zu bedecken.*

*Lösung.* Färbe die Felder des Brettes abwechselnd schwarz und weiss, sodass ein Schachbrettmuster entsteht. Die beiden entfernten Eckfelder haben nun dieselbe Farbe, daher gibt es in der Figur 32 Felder der einen und 30 Felder der anderen Farbe. Nehme nun an, dass man die Figur mit Dominosteinen überdecken kann. Jeder Dominostein bedeckt stets ein weisses und ein schwarzes Feld, egal wo und wie man ihn platziert. Daraus würde nun aber folgen, dass es gleichviele weisse wie schwarze Felder geben müsste, ein Widerspruch.

□

Das nachstehende Bild zeigt alle "Kacheln" mit höchstens vier Einheitsquadraten. Da wir in den Aufgaben auf sie verweisen werden, stellen wir sie kurz vor. Oben: Domino, Straight-Triomino und die beiden spiegelsymmetrischen L-Triominos. Unten: Straight-, Square-, T-, L- und Skew-Tetromino.

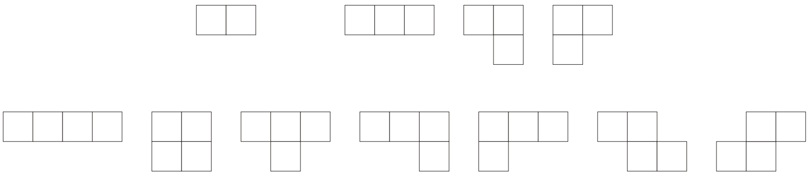


Abb. 1: Domino, Triominos und Tetrominos

Es folgt nun ein etwas komplizierteres Beispiel im gleichen Stil wie Beispiel 1.

**Beispiel 2.** *Lässt sich ein* $10 \times 10$*-Brett lückenlos und überlappungsfrei überdecken mit*

(a) *Straight-Tetrominos?*

(b) *T-Tetrominos?*

*Lösung.* (a) Färbe das Brett mit vier Farben wie in Abbildung 2 gezeigt. Offenbar bedeckt jede $4 \times 1$-Kachel immer genau ein Feld von jeder Farbe. Andererseits gibt es 26 weisse Felder, aber nur 25 schwarze Felder. Folglich kann man das Brett nicht überdecken.

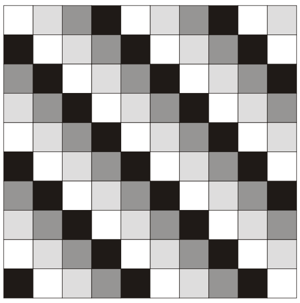


Abb. 2: Die Standardfärbung mit 4 Farben

(b) Hier verwenden wir wieder die Schachbrettfärbung aus Beispiel 1. Jedes T-Tetromino bedeckt entweder drei schwarze und ein weisses Feld oder drei weisse und ein schwarzes Feld. Nehme an, man kann das Brett bedecken, und bezeichne mit $a$ und $b$ die Anzahl T-Tetrominos des ersten und zweiten Typs in dieser Überdeckung. Die Anzahl bedeckter weisser Felder ist dann $a + 3b$, die Anzahl bedeckter schwarzer Felder $3a + b$. Da das Brett gleichviele weisse wie schwarze Felder besitzt, muss $a + 3b = 3a + b$ gelten, also $a = b$. Insbesondere ist die Anzahl T-Tetrominos *gerade*. Da jedes T-Tetromino genau 4 Felder bedeckt, folgt daraus, dass die Gesamtzahl Felder des Brettes durch 8 teilbar sein muss. Dies ist nicht der Fall, Widerspruch.

□

Die Färbung in Teil (a) heisst *Standardfärbung* mit 4 Farben. Es ist klar, wie die Standard-Färbung mit $n$ Farben aussieht. Für $n = 2$ ist es zum Beispiel gerade das Schachbrettmuster. Diese speziellen Färbungen kann man recht oft verwenden, wenn auch nicht immer.

Das letzte Beispiel zeigt eine etwas andere Anwendung von Färbungen.

**Beispiel 3.** *Betrachte in der Ebene das Gitter von allen Punkten mit ganzen Koordinaten. Auf den Punkten mit den Koordinaten* $(0,0)$, $(1,0)$ *und* $(0,1)$ *liegt je ein Chip. Man kann nun wiederholt folgendes tun: Wähle zwei beliebige Chips aus und betrachte den Punkt, der durch Punktspiegelung des ersten Chips am zweiten entsteht. Falls dieser Punkt noch frei ist, setze man dort ebenfalls einen Chip. Ist es möglich, dass irgendwann ein Chip auf dem Punkt* $(1,1)$ *liegt?*

*Lösung.* Färbe alle Gitterpunkte mit ungerader $x$- und ungerader $y$-Koordinate rot und die restlichen Gitterpunkte schwarz. Man überlegt sich leicht, dass zwei Punkte, die spiegelsymmetrisch zu einem dritten Punkt liegen, stets dieselbe Farbe haben (denn sowohl die $x$- als auch die $y$-Koordinaten müssen sich dann um eine gerade Zahl unterscheiden). Am Anfang liegen alle drei Chips auf schwarzen Punkten, folglich müssen auch alle irgendwann durch Spiegelung entstandenen neuen Chips auf schwarzen Punkten liegen. Der Punkt $(1,1)$ ist aber rot, daher kann dort nie ein Chip liegen.

□

**Aufgaben:**

1. Ein $7 \times 7$ Quadrat ist mit 16 Straight-Triominos und einem einzelnen Einheitsquadrat bedeckt. Finde alle möglichen Positionen des Einheitsquadrates.

2. (CH 07) Betrachte einen Würfel mit Kantenlänge $2a$. In jedem Eckpunkt, jedem Kantenmittelpunkt und jedem Flächenmittelpunkt befindet sich eine Stadt. Zwei Städte sind durch eine Strasse miteinander verbunden, falls ihr Abstand $a$ beträgt. Gibt es eine Reiseroute, die durch jede Stadt genau einmal führt?

3. Kann man 250 Klötze der Form $1 \times 1 \times 4$ in eine $10 \times 10 \times 10$ Box packen?

4. Ein rechteckiger Boden ist mit $1 \times 4$ und $2 \times 2$ Kacheln belegt. Eine Kachel geht zu bruch, es steht jedoch eine Kachel des anderen Typs zur Verfügung. Zeige, dass der Boden nicht durch Umordnen der Kacheln geflickt werden kann.

5. Von einem $n \times n$ Brett werden die 4 Eckfelder entfernt. Für welche Werte von $n$ ist es möglich, diese Figur mit L-Tertominos zu bedecken?

6. Ein Eckfeld eines $(2n+1) \times (2n+1)$-Brettes fehlt. Für welche $n$ kann man das Brett so mit Dominosteinen bedecken, dass genau die Hälfte der Dominosteine horizontal liegen?

7. Auf einem Feld eines $5 \times 5$-Brettes steht $-1$ und in den anderen 24 Feldern steht 1. Wir können alle Vorzeichen in einem $a \times a$-Teilquadrat umkehren, wobei $a > 1$. In welchem Feld muss am Anfang die $-1$ stehen, damit es möglich ist, lauter Einsen zu erzielen?

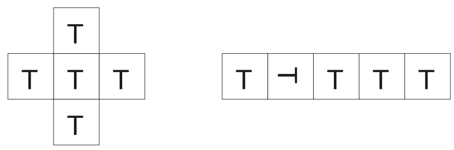
8. Bestimme alle natürlichen Zahlen $n$, sodass man ein $9 \times n$ Rechteck mit lauter L-Triominos bedecken kann.

**9.** Auf jedem Feld eines $9 \times 9$-Brettes sitzt ein Käfer. Auf ein Signal hin krabbeln alle Käfer diagonal auf ein benachbartes Feld. Danach können mehrere Käfer auf einem Feld sein. Was ist nach dem Signal die kleinstmögliche Anzahl freier Felder?

**10.** (CH 06) Betrachte ein $m \times n$-Brett, das in Einheitsquadrate unterteilt ist. Ein L-Triomino besteht aus einem Zentrumsquadrat und zwei Schenkelquadraten, also insgesamt aus drei Einheitsquadraten. In der Ecke oben links liegt ein L-Triomino, sodass das Zentrumsquadrat auf dem Eckfeld liegt. In einem Zug kann das L-Triomino um den Mitelpunkt von einem der beiden Schenkelquadrate um Vielfache von $90°$ gedreht werden. Für welche $m$ und $n$ ist es möglich, dass das L-Triomino nach endlich vielen solchen Zügen in der unteren rechten Ecke zu liegen kommt?

**11.** Ein $a \times b$ Rechteck kann genau dann mit $1 \times n$ Rechtecken überdeckt werden, wenn $n$ ein Teiler von $a$ oder ein Teiler von $b$ ist.

**12.** Die unten stehende Abbildung zeigt links fünf schwere Kisten, die nur bewegt werden können, indem man sie über eine Kante kippt. Auf dem Deckel jeder Kiste ist ein T. Rechts ist ein Bild derselben fünf Kisten in einer neuen Position. Welche der Kisten war am Anfang in der Mitte des Kreuzes?




**13.** (CH 08) Betrachte drei Seiten eines $n \times n \times n$-Würfels, die an einer der Würfelecken zusammenstossen. Für welche $n$ ist es möglich, diese vollständig und überlappungsfrei mit Papierstreifen der Grösse $3 \times 1$ zu bedecken? Die Papierstreifen können dabei auch über die Kanten zwischen diesen Würfelseiten hinweggeklebt werden.

**14.** Ist es möglich, 53 Klötze der Form $1 \times 1 \times 4$ in einen $6 \times 6 \times 6$-Würfel zu packen?

**15.** (CH 03) Auf einem Spielbrett mit $5 \times 9$ Feldern liegen $n$ Steine, wobei zu jedem Zeitpunkt auf jedem Feld höchstens ein Stein liegen darf. Ein Spielzug besteht darin, jeden Stein in eines der angrenzenden Felder oben, unten, links oder rechts zu verschieben. Dies geschieht für alle Steine gleichzeitig. Wird dabei ein Stein in einem Zug horizontal bewegt, dann muss er im nächsten Zug vertikal bewegt werden und umgekehrt. Bestimme den grössten Wert für $n$, sodass es eine Anfangsposition der $n$ Steine und eine Folge von Spielzügen gibt, sodass dieses Spiel beliebig lange fortgesetzt werden kann.

**16.** (CH 04) Sei $n > 1$ eine ungerade natürliche Zahl. Die Felder eines $n \times n$ Schachbretts sind abwechselnd weiss und schwarz gefärbt, sodass die vier Eckfelder schwarz sind. Ein L-triomino ist eine L-förmige Figur, die genau drei Felder des Brettes bedeckt. Für welche Werte von $n$ ist es möglich, alle schwarzen Felder mit L-triominos zu bedecken, sodass keine zwei L-triominos sich überlappen? Bestimme für diese Werte von $n$ die kleinstmögliche Zahl von L-triominos, die dazu nötig sind.

**17.** (IMO 99) Betrachte eine quadratische $n \times n$ Tafel, wobei $n$ eine gerade natürliche Zahl ist. Zwei Felder der Tafel heissen benachbart, wenn sie eine gemeinsame Seite haben. $N$ Einheitsquadrate werden in der Weise markiert, dass jedes Feld der Tafel (ob markiert oder nicht) mindestens ein markiertes Nachbarfeld hat. Bestimme den kleinstmöglichen Wert von $N$.

**18.** (IMO 04) Für welche natürliche Zahlen $m, n$ lässt sich ein $m \times n$-Brett vollständig und überlappungsfrei mit unten abgebildeten Kacheln überdecken? Die Kacheln dürfen auch gedreht und gespiegelt werden.