Funktionalgleichungen Aufgaben 2

1. (CH 01) Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ erfülle

(a) $f(x) \geq 0 \qquad \forall x \in [0,1]$

(b) $f(1) = 1$

(c) $f(x) + f(y) \leq f(x+y) \qquad \forall\, x, y, x+y \in [0,1]$

Zeige, dass gilt $f(x) \leq 2x$ für alle $x \in [0,1]$.

2. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \\ f(xy) &= f(x)f(y). \end{aligned}$$

3. (Shortlist 02) Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die gilt

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x) \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

4. (IMO 83) Bestimme alle Funktionen $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ mit

(a) $f(x \cdot f(y)) = y \cdot f(x) \qquad \forall\, x, y > 0$

(b) $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$.

5. (IMO 92) Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x^2 + f(y)) = y + f(x)^2.$$

6. (IMO 94) Sei S die Menge aller reellen Zahlen grösser als -1. Finde alle Funktionen $f : S \to S$, die folgende Bedingungen erfüllen:

(a) $f(x + f(y) + x \cdot f(y)) = y + f(x) + y \cdot f(x) \qquad \forall\, x, y \in S$

(b) In jedem der Intervalle $(-1, 0)$ und $(0, \infty)$ ist die Funktion $f(x)/x$ streng monoton wachsend.

7. (IMO 96) Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass gilt

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n) \qquad \forall\, m, n \in \mathbb{N}.$$

8. (IMO 02) Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle reellen x, y, z, t gilt

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz).$$

9. (China) Finde alle Funktionen $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$, für die gilt

(a) $f(x) \leq 2(x + 1)$ für alle $x \in [1, \infty)$,

(b) $f(x + 1) = \dfrac{f(x)^2 - 1}{x}$ für alle $x \in [1, \infty)$.

10. (IMO 99) Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1.$$

11. (IMO 98) Betrachte alle Funktionen f von der Menge $\mathbb{N}^+$ der positiven ganzen Zahlen in sich, die $f(m^2 f(n)) = n(f(m))^2$ für alle $m, n \in \mathbb{N}^+$ erfüllen. Bestimme den kleinstmöglichen Wert von $f(1998)$.