Funktionalgleichungen Aufgaben

1. Finde alle Lösungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Gleichung

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y) \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

2. Bestimme alle Lösungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von

$$f(x) \cdot f(y) = f(x - y) \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}.$$

3. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $f(0) = 1$ und

$$f(f(n)) = f(f(n + 2) + 2) = n \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

4. (CH 03) Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$f((x - y)^2) = x^2 - 2yf(x) + (f(y))^2$$

5. (IMO 68) Sei a eine positive Konstante und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die gilt

$$f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f(x)^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(a) Zeige, dass f periodisch ist.

(b) Finde eine solche nichtkonstante Funktion für $a = 1$.

6. (BW 01) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgender Eigenschaft: Für jedes $n > 1$ gibt es einen Primteiler p von n mit $f(n) = f(n/p) - f(p)$. Ausserdem ist $f(2001) = 1$, finde $f(2002)$.

7. (IMO 82) Die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ erfülle für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$f(m+n) - f(m) - f(n) = 0 \text{ oder } 1,$$

ausserdem sei $f(2) = 0$, $f(3) > 0$ und $f(9999) = 3333$. Bestimme $f(1982)$.

8. (Putnam 71) Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$, für die gilt

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}.$$

9. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x+y) = f(x)f(y)f(xy).$$

10. (IMO 87) Beweise, dass es keine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ gibt, sodass für alle $n \geq 0$ gilt

$$f(f(n)) = n + 1987.$$

11. (IMO 72) Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(x) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ausserdem sei f nicht identisch 0 und $|f(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass gilt

$$|g(x)| \leq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

12. (CH 01) Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ erfülle

(a) $f(x) \geq 0 \qquad \forall x \in [0, 1]$
(b) $f(1) = 1$
(c) $f(x) + f(y) \leq f(x+y) \qquad \forall\, x, y, x+y \in [0, 1]$

Zeige, dass gilt $f(x) \leq 2x$ für alle $x \in [0, 1]$.

13. (IMO 77) Für die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gelte $f(n+1) > f(f(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $f(x) = x$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

14. Finde alle Funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, sodass für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$f(m+n) + f(mn-1) = f(m)f(n) + 2.$$

15. (IMO 81) Die Funktion $f(x,y)$ erfülle die folgenden Gleichungen für alle $x, y \geq 0$:

$$\begin{aligned} f(0,y) &= y+1, \\ f(x+1,0) &= f(x,1), \\ f(x+1,y+1) &= f(x, f(x+1,y)). \end{aligned}$$

Bestimme $f(4, 1981)$.

16. (IMO 86) Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, welche die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

(a) $f(xf(y)) \cdot f(y) = f(x+y)$ für alle $x, y \geq 0$,

(b) $f(2) = 0$,

(c) $f(x) \neq 0$ für $0 \leq x < 2$.

17. (IMO 78) Die Menge der natürlichen Zahlen sei die Vereinigung der zwei disjunkten Teilmengen $\{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\}$ und $\{g(1), g(2), \ldots, g(n), \ldots\}$, wobei

$$f(1) < f(2) < \cdots < f(n) < \cdots \quad \text{und} \quad g(1) < g(2) < \cdots < g(n) < \cdots,$$

sowie $g(n) = f(f(n)) + 1$. Bestimme $f(240)$.

18. (CSO 95) Für welche ganzen Zahlen k gibt es eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, die nicht identisch verschwindet, und für die gilt

$$f(xy) = f(x) + f(y) + kf(\operatorname{ggT}(x,y)) \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{N}?$$

19. (IMO 90) Konstruiere eine Funktion $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{Q}^+$ gilt

$$f(x \cdot f(y)) = \frac{f(x)}{y}.$$

20. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die gilt

(a) $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$,

(b) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2} \quad$ für alle $x \neq 0$.

Zeige, dass es eine Konstante c gibt mit $f(x) = cx$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

21. (IMO 88) Für die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gelte $f(1) = 1$, $f(3) = 3$ und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f(2n) &= f(n), \\ f(4n+1) &= 2f(2n+1) - f(n), \\ f(4n+3) &= 3f(2n+1) - 2f(n). \end{aligned}$$

Bestimme die Anzahl Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq 1988$ und $f(n) = n$.

22. (CH 02) Bestimme alle Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die gilt:

(a) Die Menge $\left\{ \frac{f(x)}{x} \,\middle|\, x \in \mathbb{R},\ x \neq 0 \right\}$ ist endlich

(b) $f(x - 1 - f(x)) = f(x) - 1 - x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

23. (CH 03) Finde alle streng monotonen Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(f(n)) = 3n.$$