SMO Beispielaufgaben mit Lösungen

Wichtig: Die zum Lösen dieser Aufgaben notwendige Theorie wird in unseren Vorbereitungstreffen unterrichtet und es steht Zeit zum Üben zur Verfügung. Es ist also *nicht* nötig, dass du diese Aufgaben lösen kannst um dich bei der SMO anzumelden.

1. In einem Raum sind sechs Personen. Je zwei dieser Personen sind entweder Freunde oder Feinde. Zeige, dass man stets drei dieser Leute auswählen kann, die entweder gegenseitig befreundet oder gegenseitig befeindet sind.

Lösung

Wir werden das Problem zuerst in eine geometrischere Form bringen. Da das Auge immer mitdenkt, ist eine solche Visualisierung oft der erste Schritt zu einer Lösung.

Wir repräsentieren die sechs Leute durch sechs verschiedene Punkte. Sind zwei Personen befreundet, dann verbinden wir die beiden zugehörigen Punkte mit einer grünen Kante, sonst mit einer roten Kante. Auf diese Weise ergibt sich ein Sechseck, in dem jede Seite und jede Diagonale grün oder rot gefärbt ist (man nennt ein solches Gebilde aus Punkten und Kanten auch einen *Graph*). Der Inhalt der Aufgabe ist es jetzt zu beweisen, dass wir stets drei Punkte auswählen können, sodass die drei Kanten mit diesen Punkten als Endpunkten entweder alle grün oder alle rot sind. Das heisst, wir müssen zeigen, dass es stets ein rotes oder ein grünes Dreieck gibt, unabhängig von der Färbung der Kanten.

Dazu wählen wir zuerst einen beliebigen Punkt aus, nennen wir ihn P. Jede der fünf Kanten, die von P ausgehen, ist mit einer von zwei Farben gefärbt, also müssen nach dem *Schubfachprinzip* mindestens drei dieser Kanten dieselbe Farbe haben. Wir wählen also drei gleichfarbige solche Kanten aus und bezeichnen deren Endpunkte mit A, B und C. Indem wir die Farben grün und rot vertauschen, können wir ausserdem annehmen, dass diese Kanten alle grün sind.

Es gibt nun zwei Fälle: Falls eine der drei Kanten AB, BC oder CA ebenfalls grün ist, bilden deren beide Endpunkte zusammen mit P ein grünes Dreieck und wir sind fertig. Sind die Kanten AB, BC und CA aber alle rot, dann ist ABC ein rotes Dreieck und wir sind ebenfalls fertig.

Bemerkungen. Das *Schubfachprinzip* besagt folgendes:

> Werden $k \cdot n + 1$ Perlen auf n Schubfächer verteilt, dann enthält mindestens ein Schubfach mehr als k Perlen.

Dies ist natürlich völlig klar, aber dennoch oft von Nutzen. In obiger Lösung sind die Perlen die fünf Kanten mit Endpunkt P, die Schubfächer sind die beiden Farben grün und rot (also $n = k = 2$). Viele kombinatorische Probleme lassen sich mit Hilfe dieser einfachen Idee lösen, der entscheidende Punkt ist dann jeweils die Identifikation der Perlen und der Schubfächer. Eine einfache Konsequenz ist zum Beispiel, dass in einer grösseren Stadt wie Zürich oder Genf stets zwei Leute leben mit derselben Anzahl Haare auf dem Kopf. (Wieso?)

2. Drei gleich grosse Kreise k_1, k_2, k_3 schneiden sich nichttangential in einem Punkt P. Seien A und B die Mittelpunkte der Kreise k_1 und k_2. Sei D bzw. C der von P verschiedene Schnittpunkt von k_3 mit k_1 bzw. k_2. Zeige, dass $ABCD$ ein Parallelogramm ist.

Lösung

Sei M der Mittelpunkt von k_3 (siehe Abbildung 1). Man betrachte das Viereck $PBCM$. Weil die Kreise gleichen Radius haben, sind alle vier Seiten dieses Vierecks gleich lang. Folglich ist $PBCM$ ein Rhombus und insbesondere ist BC parallel zu PM. Analog kann gezeigt werden, dass AD parallel ist zu PM. Daraus folgt, dass AD parallel ist zu BC. Nach Voraussetzung sind diese beiden Strecken gleich lang und somit ist $ABCD$ ein Parallelogramm.

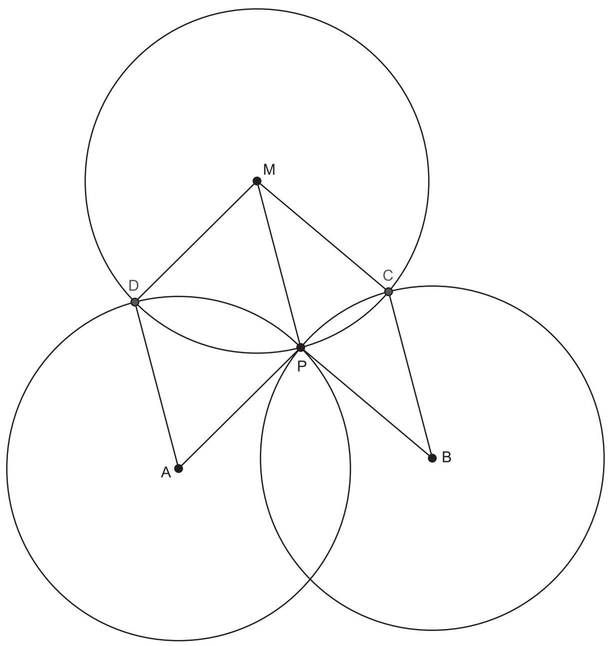

Abb. 1: Figur zur Lösung von Aufgabe 2

3. In einem Tennistournier haben mehr als zwei Spieler teilgenommen. Dabei haben je zwei Spieler genau einmal gegeneinander gespielt, und jeder Spieler hat mindestens ein Match gewonnen. Zeige, dass es drei Spieler A, B, C gibt, sodass A gegen B, B gegen C und C gegen A gewonnen hat.

1. Lösung

Wähle einen Spieler A, der unter allen Spielern die kleinste Anzahl Matches gewonnen hat. Seien U und V die Mengen der Spieler, gegen die A gewonnen bzw. verloren hat.

Nach Annahme sind U und V nicht leer. Hat ein Spieler B aus U gegen einen Spieler C aus V gewonnen, dann erfüllen A, B, C die Bedingungen der Aufgabe und wir sind fertig. Wenn alle Spieler aus U gegen alle Spieler aus V verloren haben, dann haben die Spieler in U aber allesamt weniger Matches gewonnen als A, ein Widerspruch zur Wahl von A.

2. Lösung

Jeder der n Spieler hat mindestens 1 und höchstens $n-1$ Matches gewonnen. Nach dem Schubfachprinzip gibt es also zwei Spieler A und B, die gleichviele Matches gewonnen haben. Wir können annehmen, dass A gegen B gewonnen hat, und bezeichnen die Menge der Spieler, die gegen B verloren haben, mit U. Mindestens ein Spieler C aus U muss gegen A gewonnen haben, denn sonst hätte A gegen B und alle Spieler in U gewonnen, also gegen mindestens einen Spieler mehr als B, ein Widerspruch. A, B, C erfüllen die Bedingungen der Aufgabe.

3. Lösung

Die Notation $X \to Y$ bedeute, dass X sein Match gegen Y gewonnen hat. Wir nennen eine Folge von verschiedenen Spielern $X_1 \to X_2 \to \ldots \to X_k \to X_1$ einen Zyklus. Es gibt mindestens einen Zyklus: Wähle einen beliebigen Spieler A_1. Dieser hat gegen mindestens einen anderen Spieler A_2 gewonnen. Dieser wiederum gegen einen Spieler A_3. Fährt man so weiter, muss irgendwann ein Spieler zum zweiten Mal in dieser Folge auftauschen. Jede minimale Sequenz zwischen zwei solchen Wiederholungen liefert einen Zyklus.
Sei nun $X_1 \to X_2 \to \ldots \to X_k \to X_1$ ein Zyklus minimaler Länge. Wir zeigen, dass $k = 3$ gilt, was den Beweis beendet, denn die drei Spieler eines solchen Zyklus erfüllen genau die Bedingungen der Aufgabe. Nehme also $k > 3$ an. Wenn X_1 gegen X_3 gewonnen hat, ist $X_1 \to X_3 \to X_4 \ldots \to X_k \to X_1$ ein Zyklus kleinerer Länge, Widerspruch. Wenn X_3 aber gegen X_1 gewonnen hat, dann ist $X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_1$ ein Zyklus der Länge $3 < k$, wieder ein Widerspruch.

4. Seien a, b, c natürliche Zahlen, sodass a ein Teiler von b^2, b ein Teiler von c^2 und c ein Teiler von a^2 ist. Zeige, dass

$$a^7 + b^7 + c^7$$

durch abc teilbar ist.

Lösung

Sicher ist a ein Teiler von a, denn jede natürliche Zahl teilt sich selbst. Andererseits ist nach Voraussetzung c ein Teiler von a^2. Wir zeigen nun, dass ausserdem b ein Teiler von a^4 ist. Da nämlich c ein Teiler von a^2 ist, muss also c^2 ein Teiler von $(a^2)^2 = a^4$ sein. Nun ist aber b ein Teiler von c^2, also auch von a^4, wie gewünscht. Insgesamt folgt damit:

$$a \cdot b \cdot c \qquad \text{ist ein Teiler von} \qquad a \cdot a^4 \cdot a^2 = a^7.$$

Genauso zeigt man, dass abc auch b^7 und c^7 teilt. Daher ist abc also ein Teiler von jedem Summanden in $a^7 + b^7 + c^7$, also auch von der Summe.

5. Ein 6×6-Quadrat ist mit 18 Dominosteinen irgendwie lückenlos und überlappungsfrei bedeckt. Zeige, dass es stets eine Gerade gibt, die das Quadrat in zwei Teile zerschneidet, aber keinen der Dominosteine zerteilt.

Lösung

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass jede Gerade einen Dominostein zerschneidet. Unterteile das Quadrat in 36 Einheitsquadrate und betrachte die $2 \cdot 5$ Geraden, welche das 6×6-Quadrat zerschneiden, aber keines der Einheitsquadrate. Nach Annahme zerschneidet jede solche Gerade g mindestens einen Dominostein. Wir beweisen nun, dass g sogar mindestens *zwei* Dominosteine halbiert.

Das grosse Quadrat wird von g in zwei Rechtecke der Form $6 \times k$ und $6 \times (6-k)$ unterteilt. Beide Rechtecke bestehen insbesondere aus einer geraden Anzahl Einheitsquadrate. Jeder Dominostein, der ganz innerhalb eines dieser Rechtecke liegt, bedeckt genau 2 Einheitsquadrate. Wird ein Dominostein von g halbiert, dann bedeckt er jeweils ein Einheitsquadrat in beiden Rechtecken. Nun folgt direkt, dass g eine *gerade* Anzahl Dominosteinen halbieren muss. Denn sonst würden diese Dominosteine in jedem Rechteck eine ungerade Anzahl Einheitsquadrate bedecken, und dasselbe müsste dann für diejenigen Steine gelten, die ganz im Innern von einem dieser Rechtecke liegen, ein Widerspruch. Insbesondere halbiert g also mindestens zwei Steine, wie behauptet.

Jede der 10 Geraden schneidet also mindestens zwei Dominosteine. Und offensichtlich wird kein Dominostein von mehr als einer Geraden halbiert. Daraus folgt, dass mindestens 20 Dominosteine existieren müssen. Es sind aber nach Voraussetzung nur 18, dies ist der gewünschte Widerspruch.

Bemerkungen. Wir haben hier ein *Doppeltzähl-Argument* verwendet, um den gewünschten Widerspruch zu erhalten. Wir haben einfach angenommen, dass die Behauptung falsch ist, und dann die Anzahl Dominosteine auf *zwei verschiedene* Arten gezählt. Einerseits sind es nach Voraussetzung genau 18, andererseits müssten es mindestens 20 sein. Die Technik des Doppeltzählens ist in der Kombinatorik sehr wichtig und führt oft zu sehr eleganten Lösungen.